Und plötzlich waren sie nicht mehr da

von Dipl.-Ing. Holger Filling

Bereits seit einigen Jahren werden, z.B. auf der gebräuchlichsten topographischen Karte im Maßstab 1 : 25 000 (Wanderkarte), nur noch Gauß-Krüger-Koordinaten angegeben. Auf die von Sternfreunden häufig verwendeten geographischen Koordinaten Länge λ und Breite φ hat man, aus welchen Gründen auch immer, seitdem verzichtet und so waren diese plötzlich nicht mehr da. Das ist für den Hobby-Astronomen der z.B. die Beobachtung einer streifenden Sternbedeckung durch den Mond oder einer Sternbedeckung durch einen Kleinplaneten plant sicher keine glückliche Entscheidung gewesen weil der Verlauf der Grenz- bzw. der Zentrallinie üblicher Weise in Längen- und Breitengraden angegeben wird (z.B. in dem im Kosmos-Verlag erscheinenden Jahrbuch „Der Sternenhimmel 2022“ bei den Tabellen zu den streifenden Bedeckungen ab Seite 257 ff.).

Um trotzdem nach einen geeigneten Standort für die Beobachtung suchen zu können benötigt der Sternfreund also Formeln um die Möglichkeit zu haben die konformen Gauß-Krüger-Koordinaten aus den geographischen berechnen zu können.

In dem Buch „Mathematisches Hilfsbuch für Studierende und Freunde der Astronomie“ von Wolfgang Wepner, welches vor mehr als 30 Jahren im damals noch bestehenden Treugesell-Verlag der Dr. Vehrenberg K.G. in Düsseldorf erschienen ist werden von dem Autor die dazu benötigten Formeln angegeben. Herr Wepner war zu der Zeit auch der VdS-Fachgruppen-Verantwortliche für „Rechnende Astronomie“, heute „Astrophysik und Algorithmen“. In einem Brief hat er mir damals auch noch die Formeln für den umgekehrten Weg, also die Berechnung der konformen Koordinaten aus den geographischen, mitgeteilt. Diese Berechnung hat nach dem Entfallenen der Angabe von geographischen Koordinaten in den deutschen Kartenwerken darum eine besondere Notwendigkeit erlangt.

Zu beachten ist, dass den deutschen Kartenwerken wie der Deutschen Grundkarte 1 : 5000, sowie den topographischen Karten 1 : 25000, 1 : 50000 und 1 : 100000 das Bessel‘sche Erdellipsoid zugrunde liegt. Die Halbachsen entsprechen deshalb nicht denen des Systems der IAU. Die Werte nach Bessel betragen für die große Halbachse a = 6377397,155 m und für die kleine Halbachse b = 6356078,96325 m woraus sich die Abplattung der Erde zu f = 1 / ((a - b) / a) ≈ 1 / 299,152819 ergibt. Auch in vielen anderen europäischen Ländern wird für die Erstellung von Kartenwerken das Bessel’sche Erdellipsoid zu Grunde gelegt. In den östlichen Ländern Europas sind allerdings auch Kartenwerke in Gebrauch die auf dem jüngeren Erdellipsoid von F. N. Krassowsky aus dem Jahr 1940 mit a = 6378245 m und b = 6356863 beruhen.

Als Beispiel bei meiner Berechnung sollen die Gauß-Krüger-Koordinaten der Externsteine im Teutoburger Wald, in der Nähe von Detmold, verwendet werden mit dem Rechtswert R = 3494377,65 m und dem Hochwert H = 5748335,89 m. Aus den verwendeten Formeln ergeben sich nachfolgende Werte:

I. Bestimmung der geographischen Koordinaten aus den konformen

$c = a \cdot a / b = 6398786{,}847639$ (1) $\qquad d = b \cdot b / a = 6334832{,}033378$ (2)

$e^2 = 1 - b^2 / a^2 = 0{,}006674372097$ (3) $\qquad e_0 = e^2 / (1 - e^2) = 0{,}006719218662$ (4)

$E_{(e)} = \pi / 2 \cdot (1 - 1/4 \cdot e^2 - 9/64 \cdot e^4 / 3 - 225 / 2304 \cdot e^6 / 5) = 1{,}568172017818$ (5)

$z = 2 / \pi \cdot a \cdot E_{(e)} = 6366742{,}520586$ (6)

$\alpha = d \cdot (3/8 \cdot e^2 + 15/32 \cdot e^4 + 525/1024 \cdot e^6 + 2205/4096 \cdot e^8) = 15988{,}63816379$ (7)

$\beta = d \cdot (15/256 \cdot e^4 + 105/1024 \cdot e^6 + 2205/16384 \cdot e^8) = 16{,}72993981726$ (8)

$\gamma = d \cdot (35/3072 \cdot e^6 + 105/4096 \cdot e^8) = 0{,}02178144272$ (9)

$\delta = d \cdot (315/131072 \cdot e^8) = 0{,}00003021185$ (10)

In dem nachfolgenden Rechenschema wird der Winkel p in Bogenmaß angenommen. Zu seiner Berechnung ist ein Iterationsverfahren mit maximal etwa sechs Iterationsschritten erforderlich. Der Startwert p_0 berechnet sich zu: $p_0 = h / z \cdot 180 / \pi = 0{,}9028692257262$ (11.0) und weiter im Iterationsverfahren:

$p_1 = (h + \alpha \cdot \sin(2 \cdot p_0) - \beta \cdot \sin(4 \cdot p_0) + Y \cdot \sin(6 \cdot p_0) - \delta \cdot \sin(8 \cdot p_0)) / z = 0{,}90531269721194$ (11.1)
$p_2 = (h + \alpha \cdot \sin(2 \cdot p_1) - \beta \cdot \sin(4 \cdot p_1) + Y \cdot \sin(6 \cdot p_1) - \delta \cdot \sin(8 \cdot p_1)) / z = 0{,}90530983407038$ (11.2)
$p_3 = (h + \alpha \cdot \sin(2 \cdot p_2) - \beta \cdot \sin(4 \cdot p_2) + Y \cdot \sin(6 \cdot p_2) - \delta \cdot \sin(8 \cdot p_2)) / z = 0{,}90530983745944$ (11.3)
$p_4 = (h + \alpha \cdot \sin(2 \cdot p_3) - \beta \cdot \sin(4 \cdot p_3) + Y \cdot \sin(6 \cdot p_3) - \delta \cdot \sin(8 \cdot p_3)) / z = 0{,}90530983745543$ (11.4)
$p_5 = (h + \alpha \cdot \sin(2 \cdot p_4) - \beta \cdot \sin(4 \cdot p_4) + Y \cdot \sin(6 \cdot p_4) - \delta \cdot \sin(8 \cdot p_4)) / z = 0{,}90530983745544$ (11.5)
$p = (h + \alpha \cdot \sin(2 \cdot p_5) - \beta \cdot \sin(4 \cdot p_5) + Y \cdot \sin(6 \cdot p_4) - \delta \cdot \sin(8 \cdot p_4)) / z = 0{,}90530983745544$ (11.6)
da sich die beiden letzten Ergebnisse nicht mehr unterscheiden kann das Iterationsverfahren hier beendet werden. Die nächsten Rechenschritte ergeben sich durch die Formeln:
$T = \tan p = 0{,}273992770427$ (12) $D = e_0 \cdot \cos^2 p = 0{,}00256159785$ (13)
$V = 1 + D = 1{,}273992770427$ (14) $N_1 = \sqrt{V} / c = 1{,}5648 \text{ E -07}$ (15)
$C = 0{,}5 \cdot N_1^2 \cdot V \cdot T = 1{,}56374 \text{ E -14}$ (16)

$G = (C \cdot N_1^2 \cdot (1 + 3 \cdot T^2)) / 12 = 1{,}87273 \text{ E -28}$ (17) $W = N_1 \cdot T = 1{,}99354 \text{ E -07}$ (18)
$H = N_1 / \cos p = 2{,}53432 \text{ E -07}$ (19) $F = H \cdot W^2 / 3 = 3{,}35730 \text{ E -21}$ (20)
$S = N_1^3 \cdot T \cdot (1 + 2 \cdot T^2 + D) / 6 = 3{,}45655 \text{ E - 21}$ (21) $K = [R / 10^6] = 3{,}0000000000$ (22)
wobei die Klammer eine Entier-Klammer [ ] ist. Sie bezeichnet die größte ganze Zahl, die eine gegebene beliebige Zahl nicht übertrifft. Es gilt also: $[a] \leq a$. Beispiele: [3,21] = 3; [1,25] = 1; [0,40] = 0; [–11,31] = —12. Als letztes Zwischenergebnis benötigt man noch $Y = R - 10^6 \cdot K - 500000 = -5622{,}350000000$ (23). Die geographische Länge λ beträgt damit: $\lambda = (H \cdot Y - F \cdot Y^3) \cdot 180 / \pi + 3 \cdot K =$ <u>8°,918360163</u> (24) bzw. <u>8° 55‘ 06“,10</u>. In Deutschland befinden sich die Längenmeridiane immer östlich von Greenwich und haben daher eigentlich immer ein negatives Vorzeichen. Die geographische Breite φ ergibt sich zu: $\varphi = (p - C \cdot Y^2 + G \cdot Y^4) \cdot 180 / \pi =$ <u>51°,870404516</u> (25) bzw. <u>51° 52‘ 13“,46</u>. An dieser Stelle möchte ich noch auf die verschiedenen Nordrichtungen hinweisen, die auf den Kartenwerken mit großen Maßstäben genannt werden. Man unterscheidet dabei wie folgt:
1.) geographisch Nord = Richtung des durch den Beobachtungsort gehenden Meridians;
2.) Magnetisch Nord = Richtung der Horizintalkomponenten des Magnetfeldes der Erde, welche die Kompassnadel anzeigt und die zeitlich langsam veränderlich ist und
3.) Gitter-Nord = Richtung in der die Hoch-Richtung der Gaus-Krüger-Koordinaten weist. Der Winkel zwischen geographisch und magnetisch Nord wird als Missweisung, der zwischen magnetisch und Gitter-Nord als Nadelabweichung und der zwischen geographisch und Gitter-Nord als Meridiankonvergenz bezeichnet. Die Meridiankonvergenz c_n ergibt sich aus: $c_n = (W \cdot Y - S \cdot Y^3) \cdot 180 / \pi =$ <u>–0°,064219235</u> (26) bzw. <u>–0° 03‘51“,19</u>. Wenn man die Meridiankonvergenz nicht berechnen möchte können die Formeln (21) und (26) entfallen. Die Meridiankonvergenz ist negativ, wenn Gitter-Nord westwärts von geographisch Nord liegt. Es muss berücksichtigt werden, dass alle Berechnungen im Bogenmaß (RAD) erfolgen.

II. Bestimmung der konformen Koordinaten aus den geographischen

Dazu verwende ich die Ergebnisse aus der vorherigen Berechnung: λ = 8°,918360163 und φ = 51°,870404516, letzteres muss in Bogenmass umgewandelt werden, also: $\varphi = \varphi \cdot \pi / 180 = 0{,}905309343$ (27) $n = [(\lambda + 1{,}5) / 3] = 3{,}000000000$ (28) (Achtung: hier kommt wieder die Entier-Klammer zur Anwendung!)

$l = (\lambda - 3 \cdot n) \cdot \pi / 180 = -\,-0{,}00142488$ (29) $\varepsilon^2 = e^2 / (1 - e^2) \cdot \cos^2 \varphi = 0{,}00256160$ (30) $N = a / \sqrt{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)} = 6390606{,}99$ (31)

$S = z \cdot \varphi - \alpha \cdot \sin(2 \cdot \varphi) + \beta \cdot \sin(4 \cdot \varphi) - Y \cdot \sin(6 \cdot \varphi) + \delta \cdot \sin(8 \cdot \varphi) = 5748332{,}74$ (32)

$S_1 = N \cdot \cos\varphi = 3945830{,}92 \quad (33)$

$S_2 = -0{,}5 \cdot N \cdot \sin(2 \cdot \varphi) = -3103854{,}50 \quad (34)$

$S_3 = -N \cdot \cos^3\varphi \cdot (1+\varepsilon^2 - \tan^2\varphi) = 933400{,}12 \quad (35)$

$S_4 = N \cdot \cos^3\varphi \cdot \sin\varphi \cdot (5+9 \cdot \varepsilon^2+4 \cdot \varepsilon^4 - \tan^2\varphi) = 4023243{,}93 \quad (36)$

$S_5 = N \cdot \cos^5\varphi \cdot (5+14 \cdot \varepsilon^2+13 \cdot \varepsilon^4 - \tan^2\varphi \cdot (18+58 \cdot \varepsilon^2\ 64 \cdot \varepsilon^4)+\tan^4\varphi) = -12494311{,}5 \quad (37)$

$S_6 = -N \cdot \cos^5\varphi \cdot \sin\varphi \cdot (61+270 \cdot \varepsilon^2+445 \cdot \varepsilon^4 - \tan^2\varphi \cdot (58+330 \cdot \varepsilon^2+680 \cdot \varepsilon^4)+\tan^4\varphi) = 14069154{,}9 \quad (38)$

$y = l \cdot S_1 - l^3 / 6 \cdot S_3 + l^5 / 120 \cdot S_5 = -5622{,}3507 \quad (39)$

Die gesuchten Werte R und H ergeben sich aus:

Rechtswert: $R = 10^6 \cdot n + 500000 + y = \underline{3494377{,}65\ m} \quad (40)$

Hochwert: $H = S - l^2 / 2 \cdot S_2 + l^4 / 24 \cdot S_4 - l^6 / 720 \cdot S_6 = \underline{5748335{,}89\ m} \quad (41)$

Es ergeben sich also wieder die gleichen Werte die, am Anfang der Berechnungen, als Ausgangswerte angenommen worden sind.

Anschrift des Autors:

Dipl. – Ing.

Holger Filling

Lindenstraße 66

58566 Kierspe

© 08 /2022