MATHEMATIK für die ASTRONOMIE

KULTURBUND DER DDR

Zentrale Kommission Astronomie und Raumfahrt – Arbeitskreis „Numerische Astronomie"

Veröffentlichung 10 Leipzig 1990

Bestimmung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis nach Friedrich Wilhelm Bessel

---

In dem zweiten Teil der Veröffentlichung werden die theoretischen Grundlagen für die Berechnung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis abgeschlossen und Algorithmen zur Ermittlung der einzelnen Grenz- oder Randkurven und für die Zentrallinie angegeben.

Autor: Lothar Ehrenberg
Karl-Marx-Straße 47
Böhlitz-Ehrenberg
7152

Leiter des Arbeitskreises
" Numerische Astronomie "
PSF 29
7144 Schkeuditz

Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der Horizontkurve

Für jeden Zeitpunkt der Folge der Eingangsdaten erfolgt

1) die Berechnung der Koordinaten g, d, a und x, y, z und der Kenngrößen für die Ränderberührung s, l und i nach den Gleichungen (2), (3) und (6).

2) mit den Hilfsgrößen α', β', γ' aus

$$\alpha' = x$$

$$\beta' = g\cos d - y\sin d \qquad \gamma' = \frac{g\sin d + y\cos d}{\sqrt{1-e^2}}$$

berechnen wir σ, ϵ und δ über die Gleichungen

$$\sigma\sin\epsilon = \alpha'$$
$$\sigma\cos\epsilon\cos\delta = \beta'$$
$$\sigma\cos\epsilon\sin\delta = \gamma' .$$

Ist β' negativ, wird σ durch $-\sigma$ ersetzt. Dadurch liegen die Winkel ϵ und δ immer im Intervall zwischen -90^0 und $+90^0$.

3) Aus dem Gleichungssystem

$$\varrho\sin\delta' = \sin d$$
$$\varrho\cos\delta' = \frac{\cos d}{\sqrt{1-e^2}}$$

berechnen wir ϱ und δ'.

4) Da für die äußere Ränderberührung immer $\sigma^2 > 1$ ist, können wir einen Hilfswinkel λ einführen

$$\sin\lambda = 1/\sigma$$

und die Größen

$$h = \sin\epsilon\cdot\sec\lambda$$
$$k = \cos\epsilon\cdot\sin(\delta-\delta')\cdot\sec\lambda$$
$$q = hx + k\varrho y - \tan\lambda$$

und $$\xi = \frac{l - \varrho i}{r'\varrho}\sqrt{1-e^2}$$

gewinnen wir die Größen $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$ aus

$$\Delta\omega = \xi\left(\cos m + \sin m\cdot\tan\varphi_0\cdot\sin(\mu' - a + \omega_0 + M)\right)$$

$$\Delta\varphi = \xi\,\frac{1-e^2\sin^2\varphi_0}{1-e^2}\cdot\sin m\cdot\cos(\mu' - a + \omega_0 + M).$$

Die Koordinaten ω_0 und φ_0 gehören zu dem entsprechenden Punkt auf der Zentrallinie. Die beiden Punkte auf den Grenzkurven der Totalitätszone haben die Koordinaten

$$\omega_{1/2} = \omega_0 \pm \Delta\omega$$
$$\varphi_{1/2} = \varphi_0 \pm \Delta\varphi .$$

Das Verfahren ist für alle Punkte anwendbar, die nicht zu nahe an den Randpunkten der Zentrallinie liegen.

Das in den letzten Punkten dargelegte Berechnungsverfahren berücksichtigt natürlich nicht alle möglichen Grenzfälle. Besonders bei Finsternissen, bei denen der Kernschattenkegel nur wenig in die Erdoberfläche eindringt und die Zentrallinie nur sehr kurz wird oder im Extremfall nur aus einem Punkt besteht, ist unser Verfahren nicht anwendbar.
Alle diese Fälle bedürfen einer genaueren Analyse für die Grenzkurven. Die entsprechenden Formelsätze dafür haben wir hier nicht angegeben. In der Originalarbeit von F.W. Bessel sind auch diese Fälle diskutiert.

Mit diesen Ausführungen ist die erste Aufgabenstellung gelöst. Die Berechnung des Verlaufes einer Finsternis für einen festen Ort werden wir in einer weiteren Arbeit betrachten,(Ebenso die wichtigen Spezialfälle von Sternbedeckungen durch den Mond und von Planetendurchgängen durch die Sonnenscheibe).

III-18-155

und
$$u = \cos\varphi_1 \cdot \sin(\mu' - a + \omega)$$
$$v = \cos\varphi_1 \cdot \cos(\mu' - a + \omega)$$
$$w = \sin\varphi_1$$

und
$$\tan\varphi_1 = \sqrt{1-e^2} \cdot \tan\varphi \,.$$

Dabei haben wir alle vorkommenden Größen auf den Zeitpunkt für Beginn oder Ende der Zentrallinie interpoliert.

26) Weitere Orte auf der Zentrallinie finden wir für Zeitpunkte aus dem Intervall $[t'_A \,,\, t'_E]$, wenn wir die benötigten Größen auf den Zeitpunkt t interpolieren und u, v und w aus

$$u = x$$
$$v = -y' \cdot \sin d' + \sqrt{1-x^2-y'^2} \cdot \cos d'$$
$$w = y' \cdot \cos d' + \sqrt{1-x^2-y'^2} \cdot \sin d'$$

berechnen.
Die Koordinaten des Ortes bestimmen wir dann wie unter Punkt 25).

27) Einen ausgewählten Bereich der Totalitätszone bestimmen wir, indem wir auf den betrachteten Zeitpunkt die Größen b, c, b' und c' interpolieren und den Winkel p aus

$$\tan p = -\frac{b + b'(s-\varrho)}{c + c'(s-\varrho)}$$

berechnen.
Die Größe ϱ nähern wir durch den Wert

$$\varrho = \sqrt{1-x^2-y'^2}$$

an, wobei x und y' die Werte für die Zentrallinie sind.
Mit den Werten für m und M aus dem Gleichungssystem

$$\sin m \cdot \cos M = \cos p$$
$$\sin m \cdot \sin M = \sin p \cdot \sin d$$
$$\cos m = \sin p \cdot \cos d$$

berechnen.

5) Die Koeffizienten a bis f ergeben sich aus den bisher berechneten Größen

$$a = 1 - x^2 - g^2y^2 + q^2$$
$$b = g\ell(gy - kq)$$
$$c = \ell(x - hq)$$
$$d = -g^2\ell^2(1-k^2)$$
$$e = g\ell^2hk$$
$$f = -\ell^2(1-h^2).$$

6) Die Größen a bis f bilden die Basis zur Berechnung von

$$A = d + f - a$$
$$C = b^2f + c^2d + e^2a - adf - 2bce$$
$$\mu = \tfrac{1}{2}(b^2-c^2)(f-d) - 2bce + (a + \tfrac{1}{2}(f+d))(e^2 + \tfrac{1}{4}(d-f)^2)$$
$$\nu = b^2 + c^2 - e^2 - \tfrac{1}{4}(f-d)^2$$
$$\xi = a + \tfrac{1}{2}(f+d)$$

7) Die Wurzel g der kubischen Gleichung setzen wir

$$g = \tfrac{1}{2}(d+f) + z$$

und berechnen z iterativ aus

$$z = \frac{\mu}{\nu + \xi z + z^2}\,.$$

Die Iteration konvergiert im allgemeinen so gut, daß wenige Schritte (maximal fünf) bereits ausreichen.

8) Nachdem A, C und g für jeden Zeitpunkt bekannt sind,

berechnen wir $A - g \pm 2\sqrt{\frac{C}{g}}$,

Damit ist die Berechnung der erforderlichen Größen zu jedem Zeitpunkt der Eingabedaten abgeschlossen. Sie bilden die Basis für die weiteren Berechnungen.

9) Nach dem Verfahren der inversen Interpolation ermitteln wir die Zeitpunkte zu den Nullstellen von

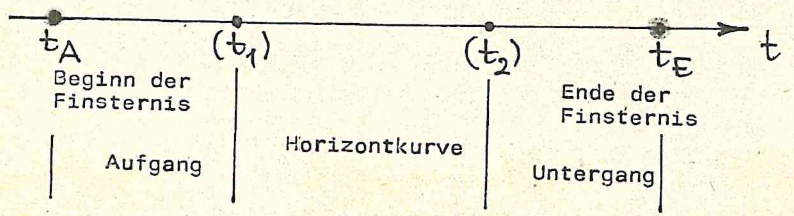
$$A - g - 2\sqrt{\frac{C}{g}}$$

und erhalten damit die Zeiten für Anfang und Ende der Finsternis t_A und t_E .

10) Der zweite Faktor $A - g + 2\sqrt{C/g}$ gibt Auskunft darüber, ob die Horizontkurve zusammenhängend (der Faktor hat keine Nullstelle) ist oder in zwei getrennte Kurven für Aufgang und Untergang zerfällt. Im zweiten Fall besitzt der Faktor zwei Nullstellen und die zugehörigen Zeitpunkte t_1 und t_2 begrenzen die Erscheinung der Horizontkurven:

- für $t \in [t_A, t_1]$ existiert die Horizontkurve für den Aufgang
- für $t \in [t_2, t_E]$ existiert die Horizontkurve für den Untergang.
- Besitzt der Faktor $A - g + 2\sqrt{C/g}$ keine Nullstelle, dann existiert für $t \in [t_A, t_E]$ die Horizontkurve.

Mit diesen zehn Schritten des Lösungsalgorithmus sind die wichtigsten Eckdaten der Finsternis ermittelt:



$$s \cdot \tan f = z \cdot \tan f - k \cdot \sec f$$

die Größen s, l = s tan f und i = tan f .

24) Numerische Differentiation der Größen x, y, a, d und μ' ermöglicht die Berechnung der Größen b , c , b' und c' der Grenzkurve

$$b = \frac{dy}{dt} - x \cdot \sin d \, \frac{d(\mu' - a)}{dt} + s \cdot \frac{dd}{dt}$$
$$c = \frac{dx}{dt} + (y \cdot \sin d - s \cdot \cos d) \cdot \frac{d(\mu' - a)}{dt}$$
$$b' = - \frac{dd}{dt}$$
$$c' = \cos d \cdot \frac{d(\mu' - a)}{dt} .$$

Wir müssen hierbei wieder beachten, daß wir die Zeitableitungen von Winkelgrößen im Bogenmaß angeben.

25) Anfang und Ende der Zentrallinie gewinnen wir aus den Nullstellen des Ausdruckes

$$1 - x^2 - y'^2 \quad \text{mit} \quad y' = \frac{y}{r'} .$$

Die Größen r' und d' berechnen wir aus dem Gleichungssystem

$$r' \cos d' = \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos d$$
$$r' \sin d' = \sin d .$$

Durch inverse Interpolation bestimmen wir die Zeitpunkte t'_A und t'_E , für die der Ausdruck

$$1 - x^2 - y'^2$$

gleich Null wird.
Hat dieser Ausdruck keine Nullstellen, dann gibt es für die betrachtete Finsternis keine Zentrallinie. Die Orte für Beginn und Ende der Zentrallinie berechnen wir nach den Formeln

$$u = x$$
$$v = - y' \sin d' \qquad w = y' \cos d'$$

$$\Delta\varphi = \frac{s-\varsigma}{\sqrt{1-x^2-y'^2}} \cdot \frac{i\sqrt{1-e^2}}{r'(1-e^2\cos^2\varphi_1)} \Big(-\sin p \cdot \sin d \cdot$$
$$\cdot \sin(\mu'-a+\omega) + \cos p \cdot \cos(\mu'-a+\omega)\Big).$$

Zur Erleichterung der Rechnung führen wir die Größen m und M durch

$$\sin m \cdot \cos M = \cos p$$
$$\sin m \cdot \sin M = \sin p \cdot \sin d$$
$$\cos m = \sin p \cdot \cos d$$

ein und erhalten endgültig

$$\Delta\omega = \frac{s-\varsigma}{\sqrt{1-x^2-y'^2}} \cdot \frac{i\sqrt{1-e^2}}{r'} \Big(\cos m +$$
$$+ \sin m \cdot \tan\varphi \cdot \sin(\mu'-a+\omega+M)\Big)$$

$$\Delta\varphi = \frac{s-\varsigma}{r'\sqrt{1-x^2-y'^2}} \cdot \frac{i\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\cos^2\varphi_1} \cdot \sin m \cdot \cos(\mu'-a+\omega+M) .$$

Auf den rechten Seiten setzen wir die Werte für den Punkt P_0 auf der Zentrallinie ein und benutzen für ς näherungsweise

$$\varsigma = \sqrt{1-x^2-y'^2} .$$

Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der Zentrallinie und des Bereiches der Totalitätszone

23) Für die Zeitpunkte der Eingangsdaten berechnen wir wie oben die Koordinaten g, a und d der z-Achse und die des Mondes x, y und z
und aus den Bedingungsgleichungen für die innere Ränderberührung

$$\sin f = \frac{A_-}{r' \cdot g}$$

Der zweite Teil des Lösungsalgorithmus dient der Bestimmung der zugehörigen Erdorte und damit der Berechnung der eigentlichen Horizontkurven als Menge aller zeitlich aufeinanderfolgender Örter auf der Erdoberfläche, von denen aus die äußere Ränderberührung zum gegebenen Zeitpunkt am Horizont gesehen wird.

11) Für den gewünschten Zeitpunkt aus den Intervallen $[t_A, t_1]$ oder $[t_2, t_E]$ im Falle zweier Horizontkurven bzw. aus $[t_A, t_E]$ im Falle einer Horizontkurve werden die Größen a, b, c, d, e, f und μ, ν, ξ aus den unter Punkt 5) und 6) berechneten Tabellen interpoliert. Aus μ, ν und ξ ermitteln wir z durch Iteration wie unter Punkt 7).

Hieraus berechnen wir die Größen

$$a+g = \xi + z$$
$$d-g = -\tfrac{1}{2}(f-d) - z$$
$$f-g = \tfrac{1}{2}(f-d) - z$$

und

$$R^2 = b^2 - (a+g)(d-g)$$
$$R'^2 = c^2 - (a+g)(f-g)$$
$$RR' = bc - e(a+g) .$$

12) Aus den Ausdrücken für R^2 und $(R')^2$ berechnen wir zunächst die positiven Werte R und R'.
Das Vorzeichen von RR' bestimmt die Vorzeichen von R und R':

- aus $RR' > 0$ folgt $R > 0$ und $R' > 0$ oder $R < 0$ und $R' < 0$
- aus $RR' < 0$ folgt $R > 0$ und $R' < 0$ oder $R < 0$ und $R' > 0$.

Die Entscheidung darüber, welche der beiden Möglichkeiten zu jedem Vorzeichen von RR' richtig ist, fällen wir danach, daß

$$\left(\frac{b-R}{a+g}\right)^2 + \left(\frac{c-R'}{a+g}\right)^2 \leq 1$$

sein muß.

13) Haben wir für R und R' die richtigen Vorzeichen gewählt, dann ist das Gleichungssystem

$$\sin n \cdot \cos m = \frac{b-R}{a+g}$$
$$\sin n \cdot \sin m = \frac{c-R'}{a+g}$$

lösbar und bestimmt uns die beiden Winkel n und m.
Aus

$$R^0 \cos m^0 = R\cos m + R'\sin m$$
$$R^0 \sin m^0 = (-R\sin m + R'\cos m)\cos n$$

berechnen wir danach R^0 und m^0.

14) Den Hilfswinkel η berechnen wir aus der Gleichung

$$\cos\eta = -\frac{\xi + 3z}{2R^0},$$

wobei wir mit η auch $-\eta$ als Lösung zulassen.
Für die Zeitpunkte t_A, t_1, t_2, t_E bzw. t_A, t_E ist der Winkel η bereits bekannt, und zwar ist

$\eta = 0^0$ für t_A und für t_2
$\eta = 180^0$ für t_E und für t_1.

Bei der numerischen Berechnung ist es zweckmäßig, für diese Zeitpunkte den Winkel η zu setzen, da unvermeidliche Fehler bei der Interpolation dazu führen können, daß

$$\left|\frac{\xi + 3z}{2R^0}\right| > 1$$

wird.

und die Bedingungsgleichung wird zu

$$(b + b'(s-\varsigma))\cos p + (c + c'(s-\varsigma))\sin p = 0.$$

Wir gewinnen daraus den Winkel p durch

$$\tan p = -\frac{b + b'(s-\varsigma)}{c + c'(s-\varsigma)}.$$

Mit dem Winkel p ist auch der Winkel p + 180^0 Lösung.
Der zweite Winkel gibt aber wegen der Form von $\Delta\varphi_1$ und $\Delta\omega$ das andere Vorzeichen für diese Ausdrücke.
Der Ausdruck für ς

$$\varsigma = w\sqrt{1-e^2}\cdot\sin d + v\cdot\cos d$$

ist nur wenig verschieden von

$$\sqrt{1-x^2-y'^2} = w\cdot\sin d' + v\cdot\cos d'.$$

Befinden wir uns bei der Wahl der Bezugspunkte nicht in allzu großer Nähe zu den Randpunkten der Zentrallinie, so können wir in allen Formeln ς durch den Wert $\sqrt{1-x^2-y'^2}$ für den Punkt auf der Zentrallinie ersetzen.

Die Formeln für die Terme $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi_1$ werden wir noch etwas umformen.
Wir ersetzen φ_1 und d' durch φ und d, d.h. wir schreiben

$$\sqrt{1-e^2}\cdot\tan\varphi, \quad \sqrt{1-e^2}\,\frac{\cos d}{r'}, \quad \frac{\sin d}{r'}$$

für

$$\tan\varphi_1, \quad \cos d', \quad \sin d'.$$

Den Ausdruck $\Delta\varphi_1$ ersetzen wir durch $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\cos^2\varphi_1}\,\Delta\varphi_1$$

und schreiben für ϵ wieder $\ell - i\varsigma$, dann entsteht

$$\Delta\omega = \frac{s-\varsigma}{\sqrt{1-x^2-y'^2}}\cdot\frac{i\sqrt{1-e^2}}{r'}\Big(\sin p(\cos d +$$
$$\sin d\cdot\tan\varphi\cdot\cos(\mu'-a+\omega) + \cos p\cdot\tan\varphi\cdot\sin(\mu'-a+\omega)$$

$$\sqrt{1-x^2-y'^2} = \cos\varphi_1 \cdot \cos(\mu'-a+\omega)\cos d' + \sin\varphi_1 \sin d'.$$

Mit diesen Werten erhalten wir für $\Delta\omega\cos\varphi_1$ und $\Delta\varphi_1$

$$\Delta\omega \cdot \cos\varphi_1 = \frac{\epsilon \cdot \sin p}{\sqrt{1-x^2-y'^2}}\Big(\cos\varphi_1 \cdot \cos d' + \sin\varphi_1 \cdot \sin d' \cdot \cos(\mu'-a+\omega)\Big) + \frac{\epsilon \cdot \cos p}{r'\sqrt{1-x^2-y'^2}} \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin(\mu'-a+\omega)$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\epsilon \cdot \sin p}{\sqrt{1-x^2-y'^2}} \cdot \sin d' \cdot \sin(\mu'-a+\omega) + \frac{\epsilon \cdot \cos p}{r'\sqrt{1-x^2-y'^2}} \cdot \cos(\mu'-a+\omega).$$

Diese Ausdrücke bestimmen die Größen $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi_1$, wenn der Winkel p bekannt ist.

Für die innere Ränderberührung gilt die Bedingungsgleichung für die Grenzkurven

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)\frac{P-\Theta}{m''} = 0,$$

mit den Größen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= -ix\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + iy\frac{dd}{dt} - i\frac{ds}{dt} \\
\mathfrak{b} &= \frac{dy}{dt} - x\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + s\frac{dd}{dt} \\
\mathfrak{c} &= \frac{dx}{dt} + (y\sin d - s\cos d)\frac{d(\mu'-a)}{dt} \\
\mathfrak{a}' &= -\frac{di}{dt} \\
\mathfrak{b}' &= -(1+i^2)\frac{dd}{dt} \\
\mathfrak{c}' &= (1+i^2)\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}
\end{aligned}$$

In dieser Gleichung sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ von der ersten Ordnung in ϵ und wir werden sie deshalb gegenüber den anderen Größen vernachlässigen.

Außerdem ist $\quad P-\Theta = m''(\varrho - s)$

15) Für jeden Winkel η (bzw. $-\eta$) berechnen wir den Winkel p aus

$$\tan\frac{p-m}{2} = \tan\frac{90°+n}{2} \cdot \tan\frac{\eta+m^0}{2}$$

und erhalten für jeden Zeitpunkt, außer für t_A, t_1, t_2 und t_E, über η und $-\eta$ je zwei Werte für p.

16) Für den betrachteten Zeitpunkt interpolieren wir jetzt die Größen x, y, l, σ, δ, ϵ, ϱ, δ', h, k, q und μ', a.

Mit $\sin\lambda = 1/\sigma$ und

$$\begin{aligned}
a &= x - l\sin p \\
b &= -(y - l\cos p)\,\varrho\sin\delta' \\
c &= (y - l\cos p)\,\varrho\cos\delta' \\
\Theta' &= q - k\varrho l\cos p - hl\sin p
\end{aligned}$$

berechnen wir die Variablen u, v und w aus

$$\begin{aligned}
(1-\Theta'\cdot\tan\lambda)u &= a - \Theta'\frac{\sin\epsilon}{\cos\lambda} \\
(1-\Theta'\cdot\tan\lambda)v &= b - \Theta'\frac{\cos\epsilon\cdot\cos\delta}{\cos\lambda} \\
(1-\Theta'\cdot\tan\lambda)w &= c - \Theta'\frac{\cos\epsilon\cdot\sin\delta}{\cos\lambda}.
\end{aligned}$$

17) Die Größen u, v, w ermöglichen die Bestimmung der Breite φ_1 und der geographischen Länge ω aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
u &= \cos\varphi_1 \cdot \sin(\mu'-a+\omega) \\
v &= \cos\varphi_1 \cdot \cos(\mu'-a+\omega) \\
w &= \sin\varphi_1.
\end{aligned}$$

Dabei hängt die geographische Breite φ mit der Breite φ_1 über die Beziehung zusammen

$$\tan\varphi_1 = \sqrt{1-e^2}\cdot\tan\varphi.$$

Damit ist der zweite Teil des Lösungsalgorithmus abgeschlossen und wir haben unter Punkt 11) bis 17) zu jedem Zeitpunkt den (oder die) zugehörigen Ort(e) auf der Erdoberfläche bestimmt.

Dabei dienen die Punkte 11) bis 15) der Ermittlung des Winkels p der Ränderberührung für den Fall der Horizontkurve. Die Ortsberechnung nach den Punkten 16) und 17) ist unabhängig vom Fall der Horizontkurve, wenn wir eine kleine Änderung beachten (siehe Hinweis unter Punkt 22)), und setzt nur die Kenntnis des Winkels p voraus.
Wir werden bei der Berechnung der Grenzkurve davon Gebrauch machen.

Mathematische Grundlagen zur Berechnung der Grenzkurve

Nach den Hauptgleichungen für eine Sonnenfinsternis

$$(s-\zeta)\tan f\cdot\cos p = y-\eta$$
$$(s-\zeta)\tan f\cdot\sin p = x-\xi$$

liegt ein Beobachter B auf der Erde auf dem Rande des Schattenkreises, wenn

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=(s-\zeta)^2\cdot\tan^2 f$$

ist.
Der Beobachter sieht zum Zeitpunkt t die Ränderberührung als Anfang oder Ende der Finsternis, je nachdem er sich im nächsten Zeitpunkt t + dt innerhalb oder außerhalb des Schattenkreises befindet.
Für den Beobachter beginnt demnach die Finsternis, wenn zum Zeitpunkt t + dt

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<(s-\zeta)^2\cdot\tan^2 f$$

ist, und die Finsternis endet, wenn zum gleichen Zeitpunkt

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2>(s-\zeta)^2\cdot\tan^2 f$$

ist.

berechnen wir die Änderungen Δu, Δv und Δw in Abhängigkeit von $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi_1$ bei Beschränkung auf die erste Ordnung

$$\Delta u = \Delta\omega\cdot\cos(\mu'-a+\omega)\cdot\cos\varphi_1 - \Delta\varphi_1\cdot\sin(\mu'-a+\omega)\cdot\sin\varphi_1$$
$$\Delta v = -\Delta\omega\cdot\sin(\mu'-a+\omega)\cdot\cos\varphi_1 - \Delta\varphi_1\cdot\cos(\mu'-a+\omega)\cdot\sin\varphi_1$$
$$\Delta w = \Delta\varphi_1\cdot\cos\varphi_1 .$$

Wir lösen diese Gleichungen nach $\Delta\varphi_1$ und $\Delta\omega\cdot\cos\varphi_1$ auf und erhalten

$$\Delta\omega\cdot\cos\varphi_1 = \Delta u\cdot\cos(\mu'-a+\omega) - \Delta v\cdot\sin(\mu'-a+\omega)$$
$$\Delta\varphi_1 = -\Delta u\cdot\sin(\mu'-a+\omega)\cdot\sin\varphi_1 - \Delta v\cdot\cos(\mu'-a+\omega)\cdot\sin\varphi_1 + \Delta w\cdot\cos\varphi_1 .$$

Die Gleichungen für u, v und w als Funktionen von x, y' und $\sqrt{1-x^2-y'^2}$

$$u = x$$
$$v = -y'\sin d' + \sqrt{1-x^2-y'^2}\cdot\cos d'$$
$$w = y'\cdot\cos d' + \sqrt{1-x^2-y'^2}\cdot\sin d'$$

lösen wir nach x, y und $\sqrt{1-x^2-y'^2}$ auf

$$x = u$$
$$y' = w\cdot\cos d' - v\cdot\sin d'$$
$$\sqrt{1-x^2-y'^2} = v\cdot\cos d' + w\cdot\sin d'$$

und ersetzen u, y und w durch die Koordinatenausdrücke

$$x = \cos\varphi_1\cdot\sin(\mu'-a+\omega)$$
$$y' = \sin\varphi_1\cdot\cos d' - \cos\varphi_1\cdot\cos(\mu'-a+\omega)\cdot\sin d'$$

Dazu entwickeln wir zunächst die Größen $u(\epsilon)$, $v(\epsilon)$ und $w(\epsilon)$:

$$u(\epsilon) = x - \epsilon \sin p$$

$$v(\epsilon) = -\left(y' - \frac{1}{r'}\epsilon\cos p\right)\sin d' + \sqrt{1-(x-\epsilon\sin p)^2-\left(y'-\frac{1}{r'}\epsilon\cos p\right)^2}\cdot\cos d'$$

$$w(\epsilon) = \left(y' - \frac{1}{r'}\cos p\right)\cos d' + \sqrt{1-(x-\epsilon\sin p)^2-\left(y'-\frac{1}{r'}\epsilon\cos p\right)^2}\cdot\sin d'.$$

Der Wurzelausdruck wird bis zur ersten Ordnung in ϵ entwickelt

$$\sqrt{1-(x-\epsilon\sin p)^2-\left(y'-\frac{1}{r'}\epsilon\cos p\right)^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{1-x^2-y'^2+2\epsilon\left(x\sin p+\frac{y'}{r'}\cos p\right)}$$

$$= \sqrt{1-x^2-y'^2}\cdot\sqrt{1+2\epsilon\frac{x\sin p+\frac{y'}{r'}\cos p}{1-x^2-y'^2}}$$

$$\approx \sqrt{1-x^2-y'^2} + \epsilon\frac{x\cdot\sin p+\frac{y'}{r'}\cos p}{\sqrt{1-x^2-y'^2}}.$$

Setzen wir die Entwicklung für den Wurzelausdruck in $u(\epsilon)$, $v(\epsilon)$ und $w(\epsilon)$ ein, dann erhalten wir die Formeln

$$\Delta u = \epsilon\cdot\sin p$$

$$\Delta v = -\frac{1}{r'}\epsilon\cos p\cdot\sin d' - \epsilon\frac{x\cdot\sin p+\frac{y'}{r'}\cos p}{\sqrt{1-x^2-y'^2}}\cdot\cos d'$$

$$\Delta w = \frac{1}{r'}\epsilon\cdot\cos p\cdot\cos d' - \epsilon\frac{x\cdot\sin p+\frac{y'}{r'}\cos p}{\sqrt{1-x^2-y'^2}}\cdot\sin d'.$$

Aus dem Gleichungssystem

$$u = \cos\varphi_1\cdot\sin(\mu'-a+\omega)$$
$$v = \cos\varphi_1\cdot\cos(\mu'-a+\omega)$$
$$w = \sin\varphi_1$$

Für die Orte auf der Grenzkurve ist die Ränderberührung das Maximum der Finsternis, d.h. der Beobachter sieht dort zugleich den Anfang und das Ende der Finsternis.
Die Größe

$$K = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2-(s-\zeta)^2\cdot\tan^2 f$$

darf sich beim Übergang vom Zeitpunkt t zum Nachbarzeitpunkt t + dt nicht ändern, ihre Zeitableitung muß demnach gleich Null sein

$$\frac{d}{dt}K = 0.$$

Alle in K vorkommenden Variablen x, y, s, ξ, η, ζ und i = tan f sind unmittelbar von der Zeit abhängig, während der Winkel der Ränderberührung p nicht direkt von der Zeit t abhängt.

Die Ableitung von K nach der Zeit t ergibt

$$\frac{1}{2}\frac{dK}{dt} = (x-\xi)\frac{dx-d\xi}{dt} + (y-\eta)\frac{dy-d\eta}{dt} - i^2(s-\zeta)\frac{ds-d\zeta}{dt} - i\frac{di}{dt}(s-\zeta)^2.$$

Benutzen wir die Hauptgleichungen, so können wir auch schreiben

$$\frac{1}{2}\frac{dK}{dt} = i(s-\zeta)\left\{\frac{dx-d\xi}{dt}\sin p + \frac{dy-d\eta}{dt}\cos p - i\frac{ds-d\zeta}{dt} - \frac{di}{dt}(s-\zeta)\right\}.$$

Für die Punkte der Grenzkurve muß demnach die Gleichung

$$(s-\zeta)\left\{\frac{dx-d\xi}{dt}\sin p+\frac{dy-d\eta}{dt}\cos p - i\frac{ds-d\zeta}{dt}-\frac{di}{dt}(s-\zeta)\right\}=0$$

gelten.
Die vorkommenden Zeitableitungen sind nicht unabhängig voneinander, insbesondere können wir $\dot\xi$, $\dot\eta$ und $\dot\zeta$ durch andere Größen ausdrücken.
Aus den Gleichungen

$$u = \cos\varphi_1\cdot\sin(\mu'-a+\omega) = \xi$$
$$v = \cos\varphi_1\cdot\cos(\mu'-a+\omega) = \zeta\cos d - \eta\sin d$$

$$w = \sin\varphi_1 = \frac{\varrho \sin d + \eta \cos d}{\sqrt{1-e^2}}$$

erhalten wir durch Differentiation nach der Zeit t (dabei sind die Ortskoordinaten φ_1 und ω konstant)

$$\frac{du}{dt} = v\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} = (\varrho \cos d - \eta \sin d)\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt} = -u\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} = -\xi\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$
$$\frac{dw}{dt} = 0$$

und aus den Gleichungen

$$\varrho = \sqrt{1-e^2}\, w \sin d + v \cos d$$
$$\eta = \sqrt{1-e^2}\, w \cos d - v \sin d$$
$$\xi = u$$

nach Differentiation nach der Zeit t

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{1-e^2}\, w \cdot \cos d \cdot \frac{dd}{dt} + \frac{dv}{dt}\cos d - v \sin d\,\frac{dd}{dt}$$
$$= \eta\,\frac{dd}{dt} - \xi \cos d \cdot \frac{d(\mu'-a)}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{1-e^2}\, w \cdot \sin d\,\frac{dd}{dt} - \frac{dv}{dt}\sin d - v \cos d\,\frac{dd}{dt}$$
$$= -\varrho\,\frac{dd}{dt} + \xi \sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$
$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{du}{dt} = (\varrho \cos d - \eta \sin d)\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}\,.$$

Eliminieren wir aus diesen Differentialquotienten die Größen ξ und η durch die Werte aus den Hauptgleichungen

$$\xi = x - (s-\varrho)\cdot i \cdot \sin p$$
$$\eta = y - (s-\varrho)\cdot i \cdot \cos p\,,$$

dann entstehen die Gleichungen für die Ableitungen

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\left(x-(s-\varrho) i \sin p\right)\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + $$
$$+ \left(y-(s-\varrho) i \cos p\right)\frac{dd}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \left(x-(s-\varrho) i \sin p\right)\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} - \varrho\,\frac{dd}{dt}$$

Zunächst sind für die innere Ränderberührung die Größen $i = \tan f$ und $l = s\cdot\tan f$ aus den Gleichungen

$$\sin f = \frac{A_-}{r'g}$$
$$s\cdot\tan f = z\cdot\tan f - k\cdot\sec f$$

zu berechnen.

Im Fall der inneren Ränderberührung ist der Ausdruck

$$(s-\varrho)\cdot\tan f = l - i\varrho$$

eine kleine Größe, deren Quadrat wir vernachlässigen können.

Bezeichnen wir diese kleine Größe mit ϵ, dann haben die beiden Hauptgleichungen die Gestalt

$$\eta = y - \epsilon\cdot\cos p$$
$$\xi = x - \epsilon\cdot\sin p\,.$$

Wir finden den Punkt der Erde, von wo aus die Ränderberührung unter dem Winkel p gesehen wird, wenn wir in dem System

$$u = x$$
$$v = -y'\sin d' + \sqrt{1-x^2-y'^2}\cdot\cos d'$$
$$w = y'\cos d' + \sqrt{1-x^2-y'^2}\cdot\sin d'$$

statt x und y die aus den Hauptgleichungen folgenden Grössen

$$x - \epsilon\cdot\sin p \quad \text{und} \quad y' - \epsilon\,\frac{\cos p}{r'}$$

setzen.

Nennen wir die so gewonnenen Größen $u(\epsilon)$, $v(\epsilon)$ und $w(\epsilon)$ und entwickeln wir sie nach Potenzen von ϵ, wobei wir uns auf erste Potenzen beschränken, dann können wir die Änderungen

$$\Delta u = u(0) - u(\epsilon)$$
$$\Delta v = v(0) - v(\epsilon)$$
$$\Delta w = w(0) - w(\epsilon)$$

berechnen.

Setzen wir die Variablen α', β' und φ' in die Definitionsgleichung für die Größe σ ein, dann hat sie die Gestalt

$$\sigma^2 = x^2 + (s\cos d - y\sin d)^2 + \frac{(s\sin d + y\cos d)^2}{1-e^2}.$$

Eine geometrische Interpretation dieses Ausdruckes erlaubt die Unterscheidung für die drei möglichen Fälle des Ortes der Kegelspitze in folgender Weise:

für $\sigma^2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1$ ist die Kegelspitze $\begin{matrix} \text{außerhalb} \\ \text{auf der Erde} \\ \text{innerhalb} \end{matrix}$.

Für die drei möglichen Fälle sind drei verschiedene Formelsätze zur Berechnung der weiteren Größen erforderlich. Der erste Formelsatz für den Fall $\sigma^2 > 1$ ist mit dem für die äußere Ränderberührung identisch, während für die beiden anderen Fälle neue Formeln angegeben werden müßten.

Wir werden uns bei unseren weiteren Betrachtungen auf einen Fall beschränken, der für viele Problemstellungen ausreichend ist.
Es ist im allgemeinen nicht erforderlich, den Bereich der Totalitätszone in seinem ganzen Verlauf zu kennen. Uns interessiert die Totalitätszone nur für einen Abschnitt der Zentrallinie, entfernt von deren Randpunkten liegend.

Bessel bestimmt in dem nachfolgend diskutierten Verfahren für diese Aufgabenstellung für einen betrachteten Punkt P_0 auf der Zentrallinie mit den Koordinaten ω_0 und φ_0 die zugehörigen Punkte P_1 und P_2 auf den beiden Grenzkurven mit den Koordinaten

$$\omega_{1/2} = \omega_0 \pm \Delta\omega$$
$$\varphi_{1/2} = \varphi_0 \pm \Delta\varphi$$

Die beiden Größen $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$ lassen sich mit ausreichender Genauigkeit nach einem verkürzten Verfahren berechnen.

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(-(y-(s-\varrho)i\cos p)\sin d + \varrho\cos d\right)\frac{d(\mu'-a)}{dt}.$$

Setzen wir diese Größen in die Bestimmungsgleichung ein und trennen die Terme mit ϱ ab, so hat sie die Gestalt

$$(s-\varrho)(V - W\varrho) = 0,$$

mit
$$V = \left(\frac{dy}{dt} - x\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt} - si^2\frac{dd}{dt}\right)\cos p + \left(\frac{dx}{dt} + y\sin d\frac{d(\mu'-a)}{dt} + si^2\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}\right)\sin p - ix\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt} + iy\frac{dd}{dt} - 1\frac{ds}{dt} - s\frac{di}{dt}$$
$$W = -(1+i^2)\frac{dd}{dt}\cos p + (1+i^2)\cos d\frac{d(\mu'-a)}{dt}\sin p - \frac{di}{dt}.$$

Die Auswertung der Gleichung

$$(s-\varrho)(V - W\varrho) = 0$$

setzt die Kenntnis von ϱ voraus. Es ist zweckmäßig, eine neue Größe ϱ' einzuführen, die mit ϱ über

$$\varrho = \frac{s\varrho'}{s+\varrho'}$$

zusammenhängt.
Die Größe ϱ' läßt sich aus Variablen gewinnen, die wir bereits berechnet haben, denn es gilt die Beziehung

$$\varrho' = \frac{s}{\sqrt{\sigma^2-1}}(P' - \Theta'),$$

mit $P'^2(\sigma^2-1) = P^2 s^2$.

Diese Formeln sind immer definiert, da für die äußere Ränderberührung σ^2 immer größer als Eins ist. Außerdem verschwindet mit P^2 auch $(P')^2$.

Die Gleichung für die Grenzkurve nimmt nach der Ersetzung von ϱ durch ϱ' die Form an

$$\frac{s}{\left(1+\frac{P'-\Theta'}{\sqrt{\sigma^2-1}}\right)^2}\left(V - \frac{Ws-V}{\sqrt{\sigma^2-1}}(P'-\Theta')\right) = 0$$

bzw.

$$V - \frac{Ws-V}{\sqrt{\sigma^2-1}}(P'-\Theta') = 0.$$

Ordnen wir die Koeffizienten nach den Faktoren cosp und sinp, so erhalten wir

$$\mathcal{A} + \mathcal{B}\cos p + \mathcal{C}\sin p - (\mathcal{A}' + \mathcal{B}'\cos p + \mathcal{C}'\sin p)(P' - \theta') = 0 ,$$

mit den Koeffizienten

$$\mathcal{A} = i x \cos d \frac{d(\mu'-a)}{dt} + i y \frac{dd}{dt} - i \frac{ds}{dt} - s \frac{di}{dt}$$
$$\mathcal{B} = \frac{dy}{dt} - x \sin d \frac{d(\mu'-a)}{dt} - s i^2 \frac{dd}{dt}$$
$$\mathcal{C} = \frac{dx}{dt} + (y \sin d + s i^2 \cos d) \frac{d(\mu'-a)}{dt}$$
$$\mathcal{A}' = \frac{s}{\sqrt{\sigma^2-1}} \left(\frac{ix}{s} \cos d \frac{d(\mu'-a)}{dt} - \frac{iy}{s} \frac{dd}{dt} + \frac{i}{s} \frac{ds}{dt} \right)$$
$$\mathcal{B}' = \frac{s}{\sqrt{\sigma^2-1}} \left(- \frac{dy}{s\,dt} + \frac{x}{s} \sin d \frac{d(\mu'-a)}{dt} - \frac{dd}{dt} \right)$$
$$\mathcal{C}' = \frac{s}{\sqrt{\sigma^2-1}} \left(- \frac{dx}{s\,dt} - \left(\frac{y}{s} \sin d - \cos d \right) \frac{d(\mu'-a)}{dt} \right) .$$

Die Werte für $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ lassen sich durch numerische Differentiation aus den Größen x, y, s, i, d, μ' und a gewinnen und sind für die Folge der Eingabezeitpunkte bekannt.

Die Bedingungsgleichung für die Grenzkurve enthält zum festen Zeitpunkt t nur den Winkel p als Unbekannte. Mit einer Auflösung nach dem Winkel p ist die Aufgabe gelöst und der zugehörige Erdort nach den Formeln unter 16) und 17) bestimmbar.

Aus den gegenseitigen Lagebeziehungen von Horizont- und Grenzkurve ist offensichtlich, daß es auf der Horizontkurve Punkte geben muß, die zugleich auch auf der Grenzkurve liegen : die Anfangs- und Endpunkte der Grenzkurve. Im Falle zweier Horizontkurven gibt es zwei solcher Punkte auf jeder Kurve. Auf dem nördlicheren der beiden Punkte der Horizontkurve für den Aufgang beginnt die nördliche Grenzkurve, während sie am nördlicheren der beiden Punkte der Horizontkurve für den Untergang endet. Analog verhält es sich bei der südlichen Grenzkurve und den südlicheren

Über diesen Zusammenhang können wir die Lösungsgleichung für die Koordinate ϱ auch anders schreiben

$$\varrho = \frac{-m' + P}{m''} = s + \frac{P - \theta}{m''} .$$

Die Koordinate ϱ wird jetzt durch eine neue Größe ϱ' ersetzt

$$\varrho = \frac{s\varrho'}{s + \varrho'} .$$

Diese neue Koordinate ϱ' ist ebenfalls Lösung einer quadratischen Gleichung, die durch Einsetzen aus der Gleichung für ϱ entsteht, und hat die Gestalt

$$\varrho' = \frac{-s(a\alpha' + b\beta' + c\gamma' - 1)}{\sigma^2 - 1} \pm \frac{s\sqrt{(a\alpha' + b\beta' + c\gamma' - 1)^2 - (a^2+b^2+c^2)(\sigma^2-1)}}{\sigma^2 - 1} .$$

Für drei mögliche Fälle, unterscheidbar durch die Größe σ im Fall der inneren Ränderberührung, definieren wir neue Größen P' und θ' :

$\sigma^2 > 1$:

$$\theta' = \frac{a\alpha' + b\beta' + c\gamma' - 1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}}$$
$$P'^2 = 1 - a^2 - b^2 - c^2 + \theta'^2$$
$$P'^2(\sigma^2 - 1) = P^2 s^2 \qquad \varrho' = \frac{s(P' - \theta')}{\sqrt{\sigma^2 - 1}}$$

$\sigma^2 < 1$:

$$\theta' = \frac{a\alpha' + b\beta' + c\gamma' - 1}{\sqrt{1 - \sigma^2}}$$
$$P'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 1 + \theta'^2$$
$$P'^2(1 - \sigma^2) = P^2 s^2 \qquad \varrho' = - \frac{s(P' - \theta')}{\sqrt{1 - \sigma^2}}$$

$\sigma^2 = 1$:

$$\varrho = s \quad \text{und} \quad \varrho = -s - \frac{2m'}{m''}$$
$$\pm P = m'' s + m' .$$

$$c = (y - \ell\cos p)\frac{\cos d}{\sqrt{1-e^2}} \qquad \gamma = \frac{\sin d + i\cos d\cos p}{\sqrt{1-e^2}}$$

bilden wir die Größen u, v und w

$$u = a + \alpha\varrho$$
$$v = b + \beta\varrho$$
$$w = c + \gamma\varrho \, .$$

Die unbekannte Koordinate ϱ ist über $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ aus der Gleichung

$$(a+\alpha\varrho)^2 + (b+\beta\varrho)^2 + (c+\gamma\varrho)^2 = 1$$

zu berechnen.

Führen wir die Größen m, m' und m'' ein und mit diesen auch die Größe P

$$m = a^2+b^2+c^2-1$$
$$m' = a\alpha+b\beta+c\gamma \qquad P = \sqrt{(m')^2 + m \cdot m''}$$
$$m'' = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

dann hat die Koordinate ϱ die Gestalt

$$\varrho = \frac{-m' \pm P}{m''} \, .$$

Mit den vom Winkel p der Ränderberührung unabhängigen Größen α', β' und γ' können wir eine neue Größe Θ

$$\Theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = m''s + m' \qquad \alpha' = a + \alpha s$$
$$\beta' = b + \beta s$$
$$\gamma' = c + \gamma s \, .$$

definieren.

Die Variable P hängt mit dieser Größe Θ und einer weiteren, die wir über die Beziehung

$$\sigma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 + m + 2m's + m''s^2$$

einführen, durch die Gleichung

$$P = \sqrt{\Theta^2 - m''(\sigma^2 - 1)}$$

zusammen.

Punkten. Bei nur einer Horizontkurve verbindet die Grenzkurve die beiden entsprechenden Punkte.

Zunächst bestimmen wir diese Anfangs- bzw. Endpunkte der Grenkurven auf den Horizontkurven.

Diese Punkte liegen sowohl auf der Horizontkurve, genügen demnach der Gleichung

$$P^2 = 0 \, ,$$

als auch auf der Grenzkurve und erfüllen die Gleichung

$$a + b\cos p + c\sin p - (a' + b'\cos p + c'\sin p)(P' - \Theta') = 0 \, ,$$

Da mit P^2 auch $(P')^2$ gleich Null wird, erhalten wir die Gleichung

$$a + b\cos p + c\sin p + (a' + b'\cos p + c'\sin p)\Theta' = 0$$

zur Berechnung des Winkels p.

Die Größe Θ' ist uns aus dem letzten Kapitel bekannt

$$\Theta' = q - kg\ell\cos p - h\ell\sin p \, .$$

Mit den immer möglichen Transformationen

$$\lambda\sin L = -b \qquad \lambda'\sin L' = -b' \qquad \lambda''\sin L'' = -g\ell k$$
$$\lambda\cos L = c \qquad \lambda'\cos L' = c' \qquad \lambda''\cos L'' = \ell h$$

errechnen wir die Größen λ, L, λ', L', λ'' und L'' und können die Bestimmungsgleichung umformen

$$a + \lambda\sin(p-L) + (a' + \lambda'\sin(p-L'))(q - \lambda''\sin(p-L'')) = 0 \, .$$

Auf jeder Horizontkurve gibt es genau zwei Winkel p' und p'' mit den dazugehörigen Zeitpunkten t' und t'', die diese Gleichung erfüllen.

Die Kenntnis von Zeitpunkt t und Winkel p ermöglichen uns auch die Berechnung des zugehörigen Ortes auf der Erde.

Wir haben damit folgende Situation:

a) im Fall zweier Horizontkurven haben wir die beiden Anfangspunkte für die nördliche und die südliche Grenzkurve P_{AN} und P_{AS} auf der Horizontkurve für den Aufgang mit den zugehörigen Zeitpunkten $t_A^{\prime}, t_A^{\prime\prime} \in [t_A, t_1]$ und den Winkeln $p_A^{\prime}$ und $p_A^{\prime\prime}$; und auf der Horizontkurve für den Untergang die Erdorte P_{UN} und P_{US}, die Zeitpunkte $t_U^{\prime}, t_U^{\prime\prime} \in [t_2, t_E]$ und die Winkel $p_U^{\prime}$ und $p_U^{\prime\prime}$.
Die nördliche Grenzkurve verbindet die Punkte P_{AN} und P_{UN} für Zeitpunkte $t \in [t_A^{\prime}, t_U^{\prime}]$ und die südliche Grenzkurve verbindet die Punkte P_{AS} und P_{US} für Zeitpunkte $t \in [t_A^{\prime\prime}, t_U^{\prime\prime}]$.

b) im Fall einer Horizontkurve gehören der Winkel $p^{\prime}$ und der Zeitpunkt $t^{\prime}$ zum Anfangspunkt P_A der Grenzkurve, während der Winkel $p^{\prime\prime}$ und der Zeitpunkt $t^{\prime\prime}$ den Endpunkt P_E der Grenzkurve bestimmen.

Nur die Randpunkte der Grenzkurve liegen zugleich auch auf der Horizontkurve und genügen deshalb noch der Bedingung $p^{\prime} = 0$.
Alle anderen Punkte der Grenzkurve müssen die vollständige Gleichung

$$a + b\cos p + c\sin p - (a^{\prime} + b^{\prime}\cos p + c^{\prime}\sin p)(P^{\prime} - \theta^{\prime}) = 0$$

erfüllen.
Die Größe $P^{\prime}$ unterscheidet sich von P nur um den Faktor

$$\frac{s}{\sqrt{\delta^2 - 1}}$$

und hat die Gestalt

$$P^{\prime} = \sqrt{1 - (x - \ell\sin p)^2 - g^2(y - \ell\cos p)^2 + \theta^{\prime 2}}\,.$$

Alle Größen der Gleichung sind für einen gegebenen Zeitpunkt t aus den entsprechenden Intervallen nur Funktionen des Winkels p der Ränderberührung

$$F(p) = a + b\cos p + c\sin p - (a^{\prime} + b^{\prime}\cos p + c^{\prime}\sin p)(P^{\prime} - \theta^{\prime}) = 0\,.$$

Für die Randpunkte der Zentrallinie ist der Wurzelausdruck gleich Null und die Formeln für u, v und w vereinfachen sich zu

$$u = x$$
$$v = -y^{\prime}\sin d^{\prime}$$
$$w = y^{\prime}\cos d^{\prime}.$$

Ein interessanter Punkt ist der Ort auf der Zentrallinie, wo die Erscheinung der Totalitätsmitte zum wahren Mittag eintritt.
Den Zeitpunkt t_M des Ereignisses berechnen wir aus der Bedingung $x = 0$, gleichbedeutend mit $u = 0$ oder auch

$$\mu^{\prime} - a + \omega = 0\,.$$

Den zugehörigen Erdort erhalten wir nach Interpolation der benötigten Größen auf den Zeitpunkt t_M aus den beiden Gleichungen

$$\omega = a - \mu^{\prime}$$

$$\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-y^{\prime 2}}\cdot\sin d^{\prime} + y^{\prime}\cos d^{\prime}}{\sqrt{1-y^{\prime 2}}\cdot\cos d^{\prime} - y^{\prime}\sin d^{\prime}}\,.$$

Der Bereich der Totalitätszone wird durch die nördliche und die südliche Grenzkurve für die innere Ränderberührung eingeschlossen.
In völliger Analogie zum Vorgehen bei der äußeren Ränderberührung können wir auch für die innere Ränderberührung Horizont- und Grenzkurven berechnen. Erschwerend kommt allerdings hinzu, daß die Spitze des Kernschattenkegels außerhalb der Erdoberfläche bleiben, diese berühren oder sie sogar schneiden und in sie eindringen kann.

Bevor wir Kriterien für die drei Fälle angeben werden, sollen die wichtigen Größen, bezogen auf die innere Ränderberührung, angegeben werden.
Aus den Variablen a, b, c und α, β, γ

$$a = x - \ell\sin p \qquad \alpha = i\sin p$$
$$b = -(y - \ell\cos p)\sin d \qquad \beta = \cos d - i\sin d\cos p$$

die Größen r' und d'

$$r' = \sqrt{1 - e^2\cos^2 d}$$

$$\tan d = \sqrt{1-e^2} \cdot \tan d'$$

und daraus die neue y-Koordinate $y' = \frac{y}{r'}$.

Für die Zentrallinie ist das Verhalten der Größe

$$Z = 1 - x^2 - y'^2$$

von Bedeutung.
Ist die Größe Z im ganzen Verlauf der Finsternis negativ, dann gibt es keine Zentrallinie.
Anfangs- und Endpunkt der Zentrallinie sind durch die Nullstellen von Z bestimmt. Es gibt zwei Nullstellen, außer in dem Fall, wenn Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen.
Bezeichnen wir die Zeitpunkte für Beginn und Ende der Zentrallinie mit t'_A und t'_E, dann existieren für alle Zeitpunkte t aus dem Intervall $[t_A, t_E]$ Punkte der Zentrallinie.
Die zugehörigen Erdorte lassen sich in Analogie zu den anderen Kurven berechnen.
Wir bestimmen für den betrachteten Zeitpunkt t die Größen x, y' und d' und daraus die Variablen

$$u = x$$

$$v = -y'\sin d' + \sqrt{1-x^2-y'^2} \cdot \cos d'$$

$$w = y\cos d' + \sqrt{1-x^2-y'^2} \cdot \sin d'.$$

Die Größen u, v und w hängen in bekannter Weise mit den Koordinaten φ_1 und ω zusammen

$$u = \cos\varphi_1 \cdot \sin(\mu' - a + \omega)$$

$$v = \cos\varphi_1 \cdot \cos(\mu' - a + \omega)$$

$$w = \sin\varphi_1 .$$

Dabei hängt der Winkel φ_1 von der geographischen Breite φ über die Beziehung

$$\tan\varphi_1 = \sqrt{1-e^2} \cdot \tan\varphi$$

ab.

Da diese Gleichung nicht explizit nach dem Winkel p aufgelöst werden kann, ist z.B. das Newtonsche Näherungsverfahren anzuwenden.
Ist p_0 ein Näherungswert für p, dann ist

$$p_1 = p_0 - \frac{F(p_0)}{F'(p_0)}$$

eine bessere Näherung für den Winkel p.
Ist der Winkel p zum gegebenen Zeitpunkt t bekannt, läßt sich der Erdort wieder aus den Punkten 16) und 17) bestimmen.

<u>Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der Grenzkurve</u>

18) Für jeden Zeitpunkt der Folge der Eingangsdaten berechnen wir durch numerische Differentiation der Größen x, y, l, s, i, a, d und μ' die neuen Größen

$$a, b, c \quad \text{und} \quad a', b', c'.$$

Wie müssen dabei beachten, daß bei den Winkelgrößen i, a, d und μ' die numerisch ermittelten Ableitungen durch Multiplikation mit dem Faktor $\pi/180$ in Bogenmaß überführt werden müssen.

19) Für eine Folge t_i von Zeitpunkten aus den Intervallen

$$[t_A, t_1] \text{ und } [t_2, t_E] \quad \text{bzw.} \quad [t_A, t_E]$$

berechnen wir nach den Punkten 11) bis 15) des Lösungsalgorithmus die Positionswinkel p'_i und p''_i.
Die Folge t_i ist so zu wählen, daß die Zeitpunkte von Anfang und Ende der Grenzkurve innerhalb der Folge liegen. Ist das nicht der Fall, halbieren wir einfach das Intervall zwischen den t_i und nehmen nur die erste Hälfte der Zeitpunkte als neue Folge.
Zum Zeitpunkt t_i und dem Winkel p'_i bzw. p''_i berechnen wir unter Einführung der Größen λ, L, λ', L' und λ'', L''

$$\lambda \sin L = -b \qquad \lambda' \sin L' = -b' \qquad \lambda'' \sin L'' = -g\ell k$$
$$\lambda \cos L = a \qquad \lambda' \cos L' = c \qquad \lambda'' \cos L'' = \ell h$$

die Folge der Zahlenwerte

$$F_0(p_i) = a + \lambda \sin(p_i - L) + (a' + \lambda' \sin(p_i - L'))(q - \lambda'' \sin(p_i - L'')).$$

Durch inverse Interpolation bestimmen wir den Zeitpunkt t, für den die Gleichung $F_0(p) = 0$ erfüllt ist.
Mit dem so ermittelten Zeitpunkt t interpolieren wir in der zugehörigen Folge der Positionswinkel p und erhalten den entsprechenden Winkel p(t).
Im Falle zweier Horizontkurven existieren zu jeder Kurve zwei Zeitpunkte t'_A und t''_A mit p'_A und p''_A, bzw. t'_U und t''_U mit p'_U und p''_U, während wir für eine Horizontkurve nur die zwei Zeitpunkte t' und t'' mit den Winkeln p' und p'' erhalten.
Findet der Rechner bei programmierter Berechnung keine Nullstelle, dann ist die Schrittweite zu verringern.

20) Ist uns zu einem gegebenen Zeitpunkt t der Positionswinkel p bekannt, so können wir nach 16) und 17) die zugehörigen Erdorte berechnen.
Im Fall zweier Horizontkurven verbindet die nördliche Grenzkurve die beiden nördlichen Punkte auf den Kurven für Aufgang und Untergang miteinander und die südliche Grenzkurve die beiden südlichen Punkte.

21) Weitere Punkte der Grenzkurve berechnen wir für eine Folge von Zeitpunkten t_i aus den Intervallen

$$[t_{AN}, t_{UN}] \text{ und } [t_{AS}, t_{US}] \quad \text{bzw.} \quad [t_{AG}, t_{UG}].$$

Die Zeitpunkte t_{XX} sind dabei die Zeiten zum nördlichen bzw. südlichen Punkt auf der Aufgangs- oder

Tritt der Schattenkreis nur so wenig in den Erdkreis ein, daß sein Mittelpunkt den Erdkreis höchstens in einem Punkt berührt, dann gibt es keine Zentrallinie und die Finsternis wird höchstens für einen Punkt der Erdoberfläche zentral.
Die Zentrallinie liegt in der Mitte eines Streifens, dessen Ränder durch die innere Berührung von Sonnen- und Mondscheibe bestimmt sind.
Die Entscheidung darüber, ob eine Finsternis total oder ringförmig ist, kann aus der Lage des Kegels des Kernschattens bezüglich der Erdkugel gefällt werden. Schneidet dieser Kegel die Erdkugel, so ist die Finsternis total. Erreicht die Kegelspitze nicht die Erdoberfläche, dann haben wir eine ringförmige Finsternis.
Mit der Koordinate s für die Spitze des Kegels 1, bestimmt aus den Formeln für die innere Ränderberührung ist die Finsternis

ringförmig
total
wenn $s - \varsigma \gtrless 0$ ist.

Damit der Mittelpunkt des Schattenkreises im Innern des Erdkreises liegt, muß sein Abstand vom Erdmittelpunkt kleiner als Eins sein:

$$r^2 = x^2 + y^2 \leq 1,$$

bzw. der Ausdruck

$$1 - r^2 = 1 - x^2 - y'^2$$

muß positiv sein.
Da die Erde aber keine Kugel, sondern ein Rotationsellipsoid mit der Exzentrizität e der Erdmeridiane ist, müssen wir die Koordinaten für die y-Werte verändern.
Abhängig von der Deklination d der z-Achse des Besselschen Koordinatensystems wird y die neue Koordinate. Wir berechnen dazu aus

$$r' \cos d' = \sqrt{1 - e^2} \cos d$$
$$r' \sin d' = \sin d$$