

$$F(p) = \alpha + \lambda \sin(p-L) - (\alpha' + \lambda' \sin(p-L'))(P' - \theta')$$

$$F'(p) = \lambda \cos(p-L) - (P' - \theta')(\lambda' \cos(p-L') + (\alpha' + \lambda' \sin(p-L')) \frac{d(P' - \theta')}{(P' - \theta') dp})$$

$$\frac{d(P' - \theta')}{(P' - \theta') dp} = \frac{(x - l \sin p) l \cos p - g^2 (y - l \cos p) l \sin p}{P' (P' - \theta')} - \frac{1}{P'} \frac{d\theta'}{dp}$$

$$\frac{d\theta'}{dp} = -lh \cos p + lgk \sin p.$$

- 22) Ist der Positionswinkel p_i zum Zeitpunkt t_i nach diesem Verfahren berechnet, so können wir nach Punkt 16) und 17) den zugehörigen Ort auf der Erdoberfläche bestimmen.

Wir müssen dabei folgendes beachten:

In den Formeln zur Berechnung von u, v und w unter Punkt 16) ist die Größe θ' durch $\theta' - P'$ zu ersetzen. Im Fall der Horizontkurve ist $P' = 0$ und damit sind die Formeln in ihrer alten Form gültig.

Mathematische Grundlagen zur Berechnung der Zentrallinie und des Bereiches der Totalitätszone einer Finsternis

Die Zentrallinie einer Sonnenfinsternis ist der Weg des Mittelpunktes des Schattenkreises auf der Erdoberfläche. Sie ist aber auch die Folge der Schnittpunkte der Kegellachse mit der Erdoberfläche.

Untergangskurve.

Auf die Zeitpunkte t_i interpolieren wir alle bei der weiteren Rechnung benötigten Größen $a, b, c, a', b', c', x, y, g, l, h, k, q$.

Der zum Zeitpunkt t_i gehörende Winkel p_i der Ränderberührung muß der Gleichung

$$F(p) = a + b \cos p + c \sin p - (a' + b' \cos p + c' \sin p)(P' - \theta') = 0$$

genügen, mit

$$P' = \sqrt{1 - (x - l \sin p)^2 - g^2 (y - l \cos p)^2 + \theta'^2}$$

Eine unmittelbare Auflösung nach dem Winkel p ist nicht möglich und wir müssen das Newtonsche Näherungsverfahren zur Iteration verwenden.

Dazu bilden wir die Ableitung $F'(p)$ von $F(p)$ nach p und nutzen die Iteration

$$p_{n+1} = p_n - \frac{F(p_n)}{F'(p_n)}$$

Als Ausgangswert p_0 für den Winkel p eignet sich der für den vorhergehenden Zeitpunkt t_{i-1} ermittelte Wert p_{i-1} (oder der Wert für den Randpunkt beim ersten weiteren Zeitpunkt).

Die Iteration kommt bei dieser Wahl des Anfangswertes und bei nicht so großen Zeitabständen schnell zum Ergebnis. Entgegen kommt uns auch noch der Fakt, daß sich der Winkel der Ränderberührung längs der Grenzkurve nur sehr langsam ändert.

Die Größen $F(p)$ und $F'(p)$ ermitteln wir schrittweise aus den Formeln

$$\theta' = q - \lambda'' \sin(p - L'')$$

$$P' = \sqrt{1 - (x - l \sin p)^2 - g^2 (y - l \cos p)^2 + \theta'^2}$$