

# MATHEMATIK für die ASTRONOMIE

KULTURBUND DER DDR

Zentrale Kommission Astronomie und Raumfahrt – Arbeitskreis „Numerische Astronomie“

Veröffentlichung 9

Leipzig 1989

Bestimmung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis

nach Friedrich Wilhelm Bessel

Mit dieser Veröffentlichung beginnt eine dreiteilige Folge über die Berechnung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis. Die Arbeit basiert auf einem historischen Werk von Bessel und beachtet sowohl theoretische als auch praktische Aspekte.

Auf der Grundlage möglichst exakter Werte für die scheinbaren Positionen von Sonne und Mond werden die theoretischen Grundlagen erörtert und in Form von Algorithmen aufbereitet. Im dritten Teil der Veröffentlichungen werden alle Algorithmen an einem konkreten Beispiel für eine Sonnenfinsternis diskutiert und die numerischen Ergebnisse nachvollziehbar aufbereitet.

In einer weiteren Veröffentlichung ist vorgesehen, die Behandlung des lokalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis zu diskutieren.

Die Methode von Bessel zur Theorie der Finsternisse bildet die Grundlage aller modernen Finsternistheorien und ist ohne weitere Schwierigkeiten auch auf Sternbedeckungen durch den Mond oder durch Planeten anwendbar.

Autor: Lothar Ehrenberg  
Karl-Marx-Strasse 47  
BHNlitz-Ehrenberg  
7152

Leiter des Arbeitskreises  
" Numerische Astronomie "   
PSF 29  
Schkenditz  
7144

Inhaltsverzeichnis

Der globale Verlauf einer Sonnenfinsternis	Seite 1
Die Besselsche Fundamentalebene und die Ränderberührung	Seite 8
Die Ränderberührung und der zugehörige Erdort	Seite 16
Mathematische Grundlagen zur Berechnung der Horizontkurve	Seite 21
Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der Horizontkurve	Seite 34
Mathematische Grundlagen zur Berechnung der Grenzkurve	Seite 40
Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der Grenzkurve	Seite 47
Mathematische Grundlagen zur Berechnung der Zentralinie und des Bereiches der Totalitätszone einer Finsternis	Seite 50
Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der Zentralinie und des Bereiches der Totalitätszone	Seite 62
Diskussion eines Beispiels: Die totale Sonnenfinsternis vom 16.02.1980	Seite 66

Quellenachweis

Die vorliegende Untersuchung wurde auf der Grundlage der Arbeit: Friedrich Wilhelm Bessel "Analyse der Finsternisse" - erschienen in "Astronomische Untersuchungen", (Zweiter Band), Königsberg 1842 - durchgeführt.

$$e^2 - (d-g)(f-g)$$

größer als Null sein.  
Aus

$$e^2 - (d-g)(f-g) > 0$$

folgt

$$(g - \frac{1}{2}(d+f))^2 \leq e^2 + \frac{1}{4}(d-f)^2,$$

und damit als Grenzen für die Wurzel g

$$\frac{1}{2}(d+f) - \sqrt{e^2 + \frac{1}{4}(d-f)^2} \leq g \leq \frac{1}{2}(d+f) + \sqrt{e^2 + \frac{1}{4}(d-f)^2}$$

Im allgemeinen sind d - f und e kleine Größen und  $\frac{1}{2}(d+f)$  ist als Näherungswert für g geeignet.

Setzen wir e gleich Null, dann liegt g zwischen den Grenzen  $f \leq g \leq d$ .

Setzen wir deshalb  $g = \frac{1}{2}(d+f) + z$ , mit der kleinen Größe z, so können wir diese durch Iteration ermitteln. Setzen wir den Ausdruck für g in die kubische Gleichung ein, dann erhalten wir eine kubische Gleichung für z

$$z^3 + \xi z^2 + \nu z - \mu = 0,$$

die wegen der Kleinheit von z iterativ gelöst werden kann:

$$z = \frac{\mu}{\nu + \xi z + z^2},$$

mit  $z_0 = \frac{\mu}{\nu}$  als Ausgangswert und der Iterationsformel

$$z_{n+1} = \frac{\mu}{\nu + \xi z_n + z_n^2}.$$

Die Größen  $\mu, \nu$  und  $\xi$  hängen von den Größen a bis f ab:

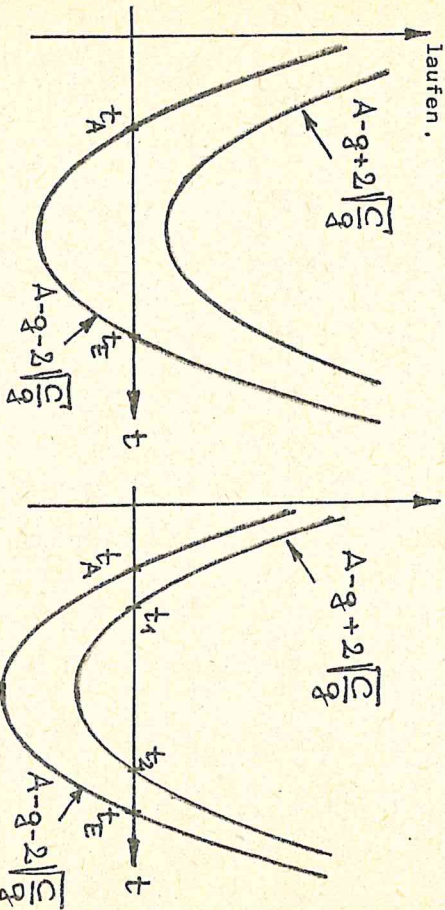
$$\mu = \frac{1}{2}(b^2 - e^2)(f-d) - 2bce + (a + \frac{1}{2}(f+d))(e^2 + \frac{1}{4}(d-f)^2)$$

$$\nu = b^2 + e^2 - e^2 - \frac{1}{4}(f-d)^2$$

$$\xi = a + \frac{1}{2}(f+d).$$

Die Nullstelle des zweiten Faktors bestimmt das Ende der Ränderberührung am Horizont. Von diesem Zeitpunkt an ist  $p^2 > 0$ , und es gibt zu jedem Winkel  $p$  einen Punkt auf der Erde, wo die Ränderberührung sichtbar wird (aber diesmal nicht am Horizont).

Das Verhalten der beiden Faktoren wird in umgekehrter Reihenfolge in der zweiten Hälfte der Finsternis durchlaufen.



Finsternis mit einer geschlossenen Horizontkurve

Finsternis mit zwei geschlossenen Horizontkurven

Abbildung 15 : Verlauf der Faktoren

$$A - g \pm 2 \sqrt{\frac{C}{g}}$$

Das Verhalten der Faktoren  $A - g \pm 2 \sqrt{\frac{C}{g}}$  erlaubt es uns, durch inverse Interpolation die Zeitpunkte  $t_A$  und  $t_E$ , bzw.  $t_A, t_1, t_2$  und  $t_E$  zu bestimmen und aus der Gleichung  $p^2 = 0$  über die Winkel  $\eta = 0^\circ$  und  $\eta = 180^\circ$  die zugehörigen Erdorte zu berechnen.

Bevor wir den Lösungsalgorithmus aufschreiben, müssen wir noch die Wurzel  $g$  genauer untersuchen.

Bei der Berechnung von  $(R^0)^2$  hatten wir festgestellt, daß

$$(bR^1 - cR)^2 = (a+g)^2(e^2 - (d-g)(f-g))$$

ist.

Da alle vorkommenden Größen reell sind, muß der Ausdruck

Bestimmung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis nach Friedrich Wilhelm Bessel

Der globale Verlauf einer Sonnenfinsternis

Die Bedingungen für das Eintreten einer Sonnenfinsternis aus der Sicht des Beobachters auf der Erde sind das Über-einstimmen der scheinbaren Positionen von Sonne und Mond mit dem Spielraum, daß die Scheiben von Sonne und Mond sich mindestens von außen berühren müssen.

Da die scheinbare Position des Mondes stark vom Beobachtungsort abhängig ist, wird das prinzipielle Eintreten und das Ausmaß der Verfinsternung für jeden Ort auf der Erde anders sein.

Das Größenverhältnis des Mondes zur Sonne und ihre Abstände untereinander und zur Erde haben zur Folge, daß eine Sonnenfinsternis nur von einem Teil der der Sonne zugewandten Erdoberfläche aus gesehen werden kann.

Es gibt deshalb grundsätzlich zwei Aufgaben bei der Berechnung einer Sonnenfinsternis:

- a) das Gebiet auf der Erdoberfläche zu bestimmen, für das die Finsternis als Erscheinung beobachtet werden kann.
- b) den Verlauf einer möglichen Finsternis für einen fest vorgegebenen Erdort zu berechnen.

Der Ablauf einer Finsternis wird durch die Projektion des Mondes aus der Sicht der Sonne, den Mondschatten, auf die Erdoberfläche bestimmt.

Die Grenzen der Sichtbarkeit werden durch eine Kurve auf der Erdoberfläche gegeben, die entsteht, wenn die gemeinsame einhüllende Fläche von Sonne und Mond die Erdoberfläche schneidet und wir die Grenzen des überstrichenen Gebietes im zeitlichen Ablauf der Finsternis betrachten. Eine zulässige Vereinfachung ist die Annahme der Kugelgestalt für Sonne und Mond.

Die Einhüllenden von Sonne und Mond sind in diesem Falle Kegeleoberflächen:

- einen Kegel mit der Spitze außerhalb der Verbindung beider Himmelskörper, der Erde zugewandt;
- zwei Kegel mit gemeinsamer Achse und gemeinsamer Spitze auf der Verbindungslinie beider Körper.

Der erste Kegel begrenzt bei seinem Schnitt mit der Erdoberfläche das Gebiet der Totalität, während von den zwei Kegeln der erdzugewandte bei seinem Schnitt das Gebiet der partiellen Verfinsterung einschließt.

Erreicht die Spitze des Kernschattenkegels nicht die Erdoberfläche, bleibt die Finsternis partiell. Ringförmige Verfinsterung tritt dabei in dem Gebiet auf, das durch den Schnitt des über die Spitze hinaus verlängerten Kegels mit der Erdoberfläche entsteht.

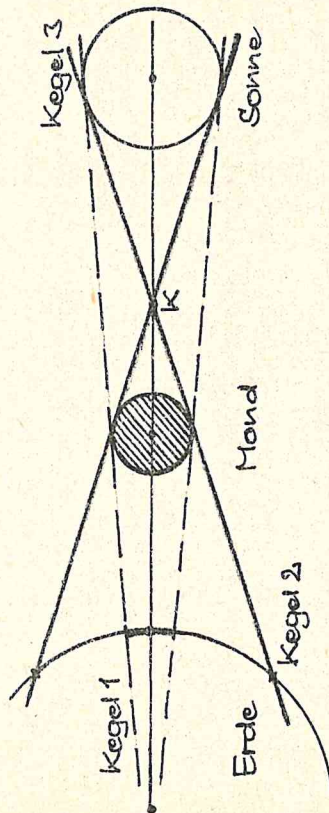


Abbildung 1 : die Lage der Schattenkegel

Die Schnittlinie der Verbindungsgesaden von Mond- und Sonnenmittelpunkt mit der Erdoberfläche ist die Zentral-  
linie der Finsternis.

Siehe folgende Seite

Abbildung 2 : erster und letzter Kontakt

a) der Ausdruck ist positiv:

$$(g' - g'')^2 > 0,$$

d.h. es existieren drei reelle Wurzeln der kubischen Gleichung und es gilt:  $P^2 < 0$ , damit ist die Ränderberührung nirgends auf der Erde sichtbar.

b) der Ausdruck ist Null:

$$(g' - g'')^2 = 0,$$

d.h. einer der Faktoren  $A - g \pm \sqrt{C/g}$  ist Null, damit ist  $P^2 = 0$  lösbar und wir erhalten den Wert  $\eta = 0^\circ$ .

Wir haben den Beginn der Finsternis, den ersten Kontakt, bestimmt.

c) der Ausdruck wird negativ:

$$(g' - g'')^2 < 0,$$

d.h. einer der Faktoren  $A - g \pm \sqrt{C/g}$  ist positiv und der andere negativ.

Die Gleichung  $P^2 = 0$  ist lösbar, wobei mit  $\eta_0$  auch  $-\eta_0$  Lösung ist.

Wir erhalten zu jedem Zeitpunkt zwei Orte auf der Erdoberfläche, von wo aus die Ränderberührung am Horizont gesehen wird.

Tritt der Mondschaten nicht vollständig in den Erdkreis ein, so bleibt während der ganzen Finsternis einer der Faktoren positiv und der andere negativ.

Die Finsternis endet mit dem letzten Kontakt, wenn der vorher negative Faktor wieder Null wird und die Gleichung  $P^2 = 0$  mit dem Winkel  $\eta = 180^\circ$  wieder nur eine Lösung hat. Anschließend sind beide Faktoren positiv und mit  $P^2 < 0$  existieren keine Lösungen mehr.

Tritt aber der Mondschaten vollständig in den Erdkreis ein, dann hat auch der zweite Faktor eine Nullstelle und wird anschließend ebenfalls negativ.

$$3g - A + \sqrt{(3g - A)^2 - (g' - g'')^2} \cdot \cos \eta = 0$$

übertragen,  
Damit die Gleichung

$$\cos \eta = - \frac{3g - A}{\sqrt{(3g - A)^2 - (g' - g'')^2}}$$

eine reelle Lösung hat, muß der Ausdruck  $(g' - g'')^2 \leq 0$  sein.

Der Fall, daß dieser Ausdruck  $(g' - g'')^2 = 0$  ist, führt auf die beiden möglichen Winkel

$$\eta = 0^\circ \text{ und } \eta = 180^\circ$$

und diese entsprechen den äußeren Kontaktpunkten für Beginn und Ende der Finsternis.

Ist  $(g' - g'')^2 < 0$ , dann ist die Gleichung lösbar, wobei mit  $\eta_0$  auch  $-\eta_0$  Lösung ist.

Über die zugehörigen Winkel  $p$  können wir die entsprechenden Erdorte berechnen.

Damit wir nicht alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung berechnen müssen, ersetzen wir  $(g' - g'')^2$  durch

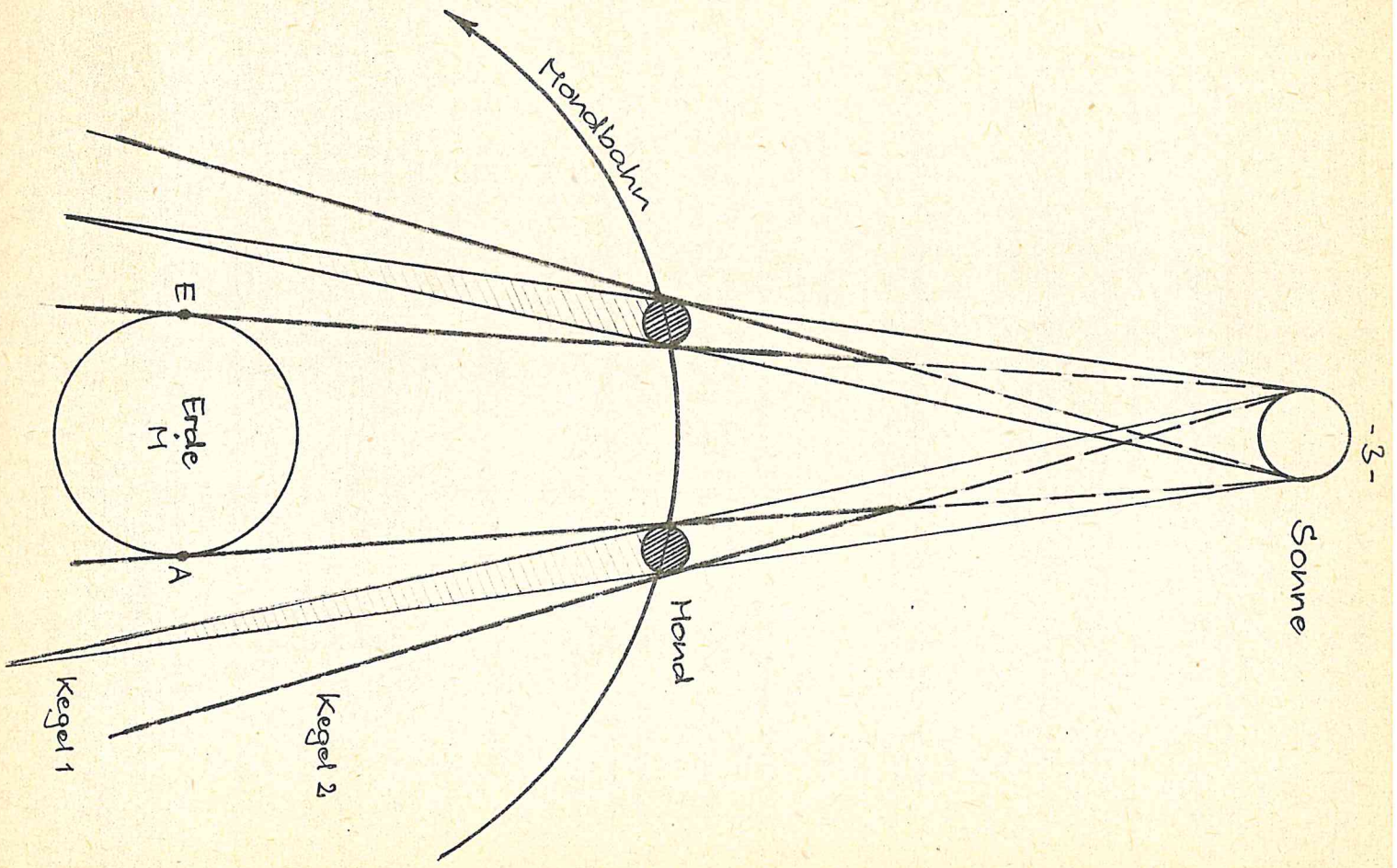
$$\begin{aligned} (g' - g'')^2 &= (A - g)^2 - \frac{4C}{g} \\ &= \left( A - g + 2\sqrt{\frac{C}{g}} \right) \left( A - g - 2\sqrt{\frac{C}{g}} \right). \end{aligned}$$

Das Nullwerden von  $(g' - g'')^2$  entspricht den Nullstellen eines der beiden Faktoren

$$A - g + 2\sqrt{\frac{C}{g}} = 0$$

$$A - g - 2\sqrt{\frac{C}{g}} = 0$$

Wir können jetzt den Ablauf der Finsternis am Verhalten der Größe  $(g' - g'')^2$  diskutieren.



Zur einheitlichen Beschreibung des zeitlichen Ablaufes einer Finsternis hat F.W. Bessel eine Bezugsebene eingeführt, auf die alle Ereignisse bezogen werden können. Die Besselsche Ebene steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte von Sonne und Mond und enthält den Erdmittelpunkt.

Die Schnittkurven der einhüllenden Kegel mit dieser Ebene sind immer Kreise, da die Kegelachse mit der Verbindungsgeraden zusammenfällt.

Zu verschiedenen Zeitpunkten ist die Lage der Ebene im Raum unterschiedlich. Alle Ebenen zu verschiedenen Zeitpunkten enthalten den Erdmittelpunkt als gemeinsamen Punkt.

Fixieren wir den Erdmittelpunkt in der Ebene, dann wird der zeitliche Ablauf der Finsternis durch die Bewegung des Durchstoßpunktes der Kegelachse beschrieben.

Nehmen wir den Erdradius als Bezugsgröße, dann gibt der Schnitt der Erdkugel mit der Ebene einen Kreis vom Radius  $r = 1$ , den Erdkreis.

Die zeitliche Abfolge der Schnittkreise der Kegel und deren Schnittpunkte und Oberdeckungen mit dem Erdkreis charakterisieren die Finsternis.

Danach können wir prinzipiell zwei verschiedene Abläufe unterscheiden:

1. der Schattenkreis tritt vollständig in den Erdkreis ein und
  - die Finsternis hat eine nördliche und eine südliche Grenzkurve für die Sichtbarkeit
  - es gibt immer eine Zentrallinie.
2. der Schattenkreis tritt nur teilweise in den Erdkreis ein und
  - die Finsternis hat nur eine nördliche oder südliche Grenzkurve für die Sichtbarkeit
  - tritt der Mittelpunkt des Schattenkreises nicht in den Erdkreis ein, gibt es keine Zentrallinie.

Aus den Eigenschaften der Wurzeln einer kubischen Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

$$A = g + g' + g''$$

$$B = gg' + gg'' + g'g''$$

$$C = gg'g''$$

und der Gestalt von A und B

$$A = d + f - a$$

$$B = b^2 + c^2 - e^2 - a(d+f) + df$$

erhalten wir die endgültige Form für  $(R^0)^2$ , nur durch die Wurzeln dargestellt,

$$(R^0)^2 = B - 2gA + 3g^2$$

$$= gg' + gg'' + g'g'' - 2g(g + g' + g'') + 3g^2$$

$$= (g - g')(g - g'')$$

Den Ausdruck für  $P^2$  können wir auch auf die Wurzeln  $g, g', g''$  umschreiben

$$P^2 = \frac{\cos^2 \eta}{(1 - \sin \eta \cos \eta)^2} \{ 2g - g' - g'' + 2\sqrt{(g - g')(g - g'')} \cdot \cos(\eta - m^0) \}$$

Um komplexe Größen zu vermeiden, ersetzen wir  $g'$  und  $g''$  durch die immer reellen Ausdrücke A und  $(g' - g'')^2$ :

$$2g - g' - g'' = 3g - A$$

$$4(g - g')(g - g'') = (3g - A)^2 - (g' - g'')^2$$

und erhalten für  $P^2$ , ( $\eta = u - m^0$ )

$$P^2 = \frac{\cos^2 \eta}{(1 - \sin \eta \cos \eta)^2} \{ 3g - A + \sqrt{(3g - A)^2 - (g' - g'')^2} \cdot \cos \eta \}$$

Die Lösung der ersten Aufgabe, die Bestimmung der Horizontkurve, wird über die Bedingung  $P^2 = 0$  auf die Lösung der Gleichung

Die Größe  $R^0$  hängt in einfacher Weise mit den Wurzeln  $g, g', g''$  der kubischen Gleichung zusammen.  
Nach Definition ist

$$\begin{aligned} (R^0)^2 &= (R \cos \alpha + R' \sin \alpha)^2 + (R' \sin \alpha - R' \cos \alpha)^2 \cos^2 \alpha \\ &= (R \cos \alpha + R' \sin \alpha)^2 + (R' \sin \alpha - R' \cos \alpha)^2 \\ &\quad - (R' \sin \alpha - R' \cos \alpha)^2 \sin^2 \alpha \\ &= R^2 + R'^2 - (R' \sin \alpha \sin \alpha - R' \cos \alpha \sin \alpha)^2 \\ &= R^2 + R'^2 - \left( R' \frac{c-R'}{a+g} - R' \frac{b-R'}{a+g} \right)^2 \\ &= R^2 + R'^2 - \frac{(cR' - bR')^2}{(a+g)^2} \end{aligned}$$

Setzen wir die Werte für

$$\begin{aligned} R^2 &= b^2 - (a+g)(d-g) \\ R'^2 &= c^2 - (a+g)(f-g) \\ RR' &= bc - e(a+g) \end{aligned}$$

ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} (R^0)^2 &= b^2 - (a+g)(d-g) + c^2 - (a+g)(f-g) \\ &\quad + \frac{b^2(f-g) + c^2(d-g) - 2bce}{a+g} \end{aligned}$$

Nun ist aber, da  $g$  eine Wurzel der kubischen Gleichung  $(a+x)(d-x)(f-x) - b^2(f-x) - c^2(d-x) - e^2(a+x) + 2bce = 0$  ist, der Ausdruck  $b^2(f-g) + c^2(d-g) - 2bce$  gleich

$$(a+g)((d-g)(f-g) - e^2).$$

Damit hat  $(R^0)^2$  endgültig die Gestalt

$$(R^0)^2 = b^2 + c^2 - e^2 - a(d+f) + df - 2(d+f-a)g + 3g^2.$$

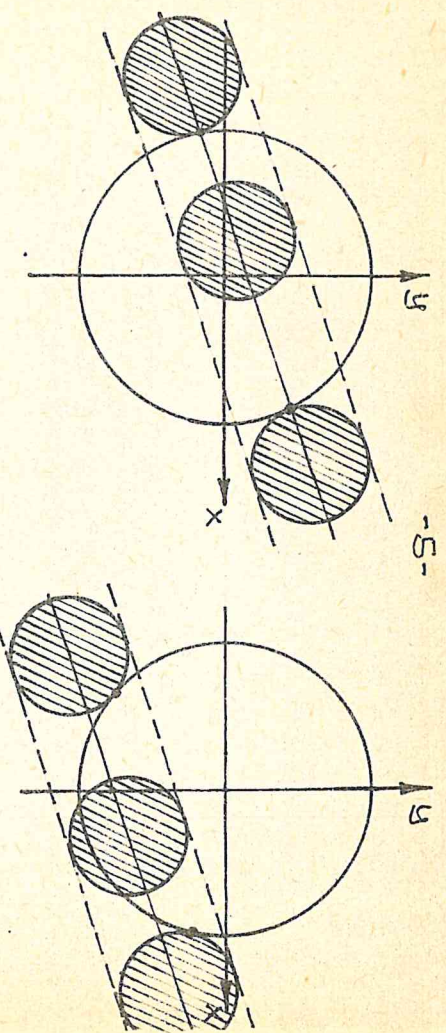
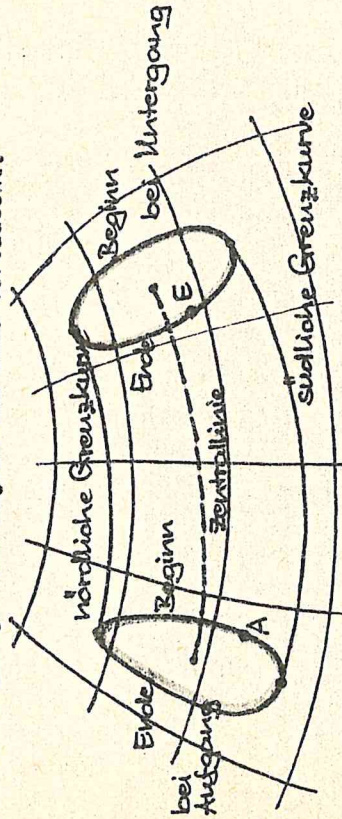


Abbildung 2 : die beiden Typen einer Finsternis

In der Darstellung mit der Besselschen Bezugsebene ( $xy$ -Ebene) sind auch besondere Ereignisse im Finsternisablauf abzulesen:

- der erste äußere Kontakt des Schattenkreises mit dem Erdkreis markiert den Beginn der Finsternis (für den Berührungspunkt als Erdort beginnt die äußere Berührung der beiden Himmelskörper bei Aufgang des Berührungspunktes am Horizont)
- unmittelbar nach dem ersten Kontakt gibt es zwei Schnittpunkte des Schattenkreises mit dem Erdkreis (für die zugehörigen Erdörter beginnt die Finsternis ebenfalls mit dem Aufgang des Berührungspunktes am Horizont)
- beim weiteren Durchlaufen des Schattenkreises gibt es für den Fall des vollständigen Eintritts einen nördlichsten und einen südlichsten Schnittpunkt mit dem Erdkreis (für die zugehörigen Erdörter ist der Aufgang des Berührungspunktes am Horizont das Maximum der Finsternis)
- für die den weiteren Schnittpunkten zugehörigen Erdörter ist der Aufgang des Berührungspunktes am Horizont das Ende der Finsternis)
- löst sich der Schattenkreis innen vom Erdkreis ab, dann sind die Erscheinungen der Finsternis nicht mehr mit dem Aufgang verbunden. Es markiert sich eine obere und eine untere Grenzkurve, deren zuge-

- ordnete Erdörter die äußere Ränderberührung der Körper als Maximum der Finsternis sehen.
- berührt der Schattenkreis den Erdkreis auf der anderen Seite von innen, dann ist für den zugehörigen Erdort der Beginn der Finsternis gleichzeitig mit dem Untergang des äußeren Berührungspunktes.
- von da an gibt es wieder zwei Punkte, für die Beginn der Finsternis und Untergang des Berührungspunktes zusammenfallen.
- für einen nördlichsten und einen südlichsten Punkt ist der Untergang des Berührungspunktes das Maximum der Finsternis.
- zu den weiteren Schnittpunkten gehören Erdörter, für die die Finsternis mit dem Untergang des Berührungspunktes endet.
- der letzte äußere Kontakt von Schattenkreis und Erdkreis markiert den Erdort, für den als letzten die Finsternis bei Untergang des Berührungspunktes endet. Übertragen wir die Kurven für Aufgang und Untergang der äußeren Berührungspunkte der beiden Himmelskörper auf die Erdoberfläche, dann werden die Kurven wegen der Eigendrehung der Erde und der Relativbewegung des Schattens auseinandergezogen und Beginn und Ende vertauscht.



A - erster Kontakt (Beginn der Finsternis)  
E - letzter Kontakt (Ende der Finsternis)

Abbildung 4 : Finsternisverlauf auf der Erde

$$a+g + \{(b+R)\cos m + (c+R')\sin m\} \cos(p-m) - \{(b+R)\sin m - (c+R')\cos m\} \sin(p-m)$$

und nach Ersetzung durch den Winkel  $u$

$$\frac{1}{1-\sin u \cdot \cos u} \left\{ a+g - \frac{b^2-R^2+c^2-R'^2}{a+g} + \right.$$

$$\left. + 2(R\cos m + R'\sin m)\cos u - 2(R\sin m - R'\cos m)\cos u \sin u \right\}$$

Nun ist aber  $b^2 - R^2 = (a+g)(d-g)$   
und damit  $c^2 - R'^2 = (a+g)(f-g)$

$$a+g - \frac{b^2-R^2+c^2-R'^2}{a+g} = a+g - (d-g) - (f-g) = a-d-f+3g = 3g-A.$$

Die Größe  $P^2$  nimmt nach diesen Umformungen der beiden Faktoren die Gestalt an

$$P^2 = \frac{\cosh^2}{(1-\sin u \cdot \cos u)^2} \{ 3g - A + 2(R\cos m + R'\sin m)\cos u - 2(R\sin m - R'\cos m)\cos u \sin u \}$$

Setzen wir noch

$$R^0 \cos m^0 = R \cos m + R' \sin m$$

$$R^0 \sin m^0 = -(R \sin m - R' \cos m) \cos u,$$

so wird  $P^2$  noch einfacher

$$P^2 = \frac{\cosh^2}{(1-\sin u \cdot \cos u)^2} \{ 3g - A + 2R^0 \cos(u-m^0) \}.$$



angeben.  
 Zunächst treffen wir eine Vereinarbung. In der Zerlegung von  $P^2$  in zwei quadratische Faktoren sollen die beiden Größen  $R$  und  $R'$  so gewählt werden, dass

$$(b-R)^2 + (c-R')^2 < (a+g)^2$$

ist. Dies entspricht nur einer Vorzeichenvereinarbung für  $R$  und  $R'$ , da diese aus

$$R^2 = b^2 - (a+g)(d-g)$$

$$R'^2 = c^2 - (a+g)(f-g)$$

und berechnet werden.  
 Wir setzen dann

$$\sin \cos m = \frac{b-R}{a+g}$$

$$\sin \sin m = \frac{c-R'}{a+g}$$

und aus  
 wird  
 $(a+g) \cdot (1 + \sin \cos (p-m))$   
 Führen wir über

$$\cos (p-m) = \frac{\cos u - \sin u}{1 - \sin \cos u}$$

$$\sin (p-m) = \frac{\cos u \cdot \sin u}{1 - \sin \cos u}$$

einen Winkel  $u$  anstelle des Winkels  $p$  ein, dann erhalten wir für

$$1 + \sin u \cdot \cos (p-m) = \frac{\cos^2 u}{1 - \sin u \cdot \cos u}$$

Der andere Faktor

$$a+g + (b+R) \cos p + (c+R') \sin p$$

wird auf die gleichen Variablen transformiert. Aus dem Faktor wird durch Umformung

Tritt der Schattenkreis nicht vollständig in den Erdkreis ein, dann entfällt eine der beiden Grenzkurven und die geschlossenen Kurven für Aufgang und Untergang werden zu einer Kurve, in deren Durchlauf die Aufgangs- in die Untergangsbereiche übergehen.

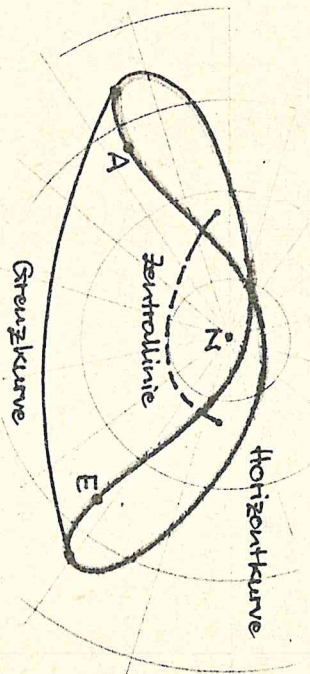


Abbildung 5 : der Fall einer Horizontkurve

- Zur Beurteilung des globalen Finsternisverlaufes sind 3 Kurven auf der Erdoberfläche getrennt zu untersuchen:
- die beiden geschlossenen - oder ein ineinander übergehender - Kurvenzüge für Beginn bzw. Ende der Finsternis bei Aufgang oder Untergang des Berührungspunktes am Horizont - die Horizontkurven
  - die nördliche und südliche Grenzkurve mit dem Maximum der Finsternis als äußere Berührung - die Grenzkurven
  - den Verlauf der zentralen Verfinsternung - die Zentrallinie.

Wir werden diese drei verschiedenen Kurven in der gleichen Reihenfolge nacheinander untersuchen und Algorithmen zu ihrer punktweisen Berechnung angeben.  
 Für den Fall der inneren Ränderberührung von Sonne und Mond treten prinzipiell die gleichen Kurven (Horizont- und Grenzkurven) auf. Zur Diskussion der Finsternis sind aber nur die Grenzkurven von Bedeutung. Für diese Kurven werden wir ebenfalls ein Berechnungsverfahren angeben.

Die Besselsche Fundamentalebene und Ränderberührungen

Die Besselsche Bezugsebene ist xy-Ebene eines Koordinatensystems im Raum. In diesem Koordinatensystem ist die z-Achse parallel zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte  $M_1 - M_2$  von Sonne und Mond. Die z-Achse trifft die Himmelskugel im Punkt Z mit der Rektaszension  $\alpha$  und der Deklination  $\delta$ .

Die y-Achse wird so gelegt, daß sie die Himmelskugel im Punkt Y mit den Koordinaten  $\alpha$  und  $\delta + 90^\circ$  trifft. Die x-Achse ergänzt die beiden anderen Achsen zu einem Rechtssystem.

Der Ursprung des so orientierten Koordinatensystems XYZ liegt im Mittelpunkt M der Erde.

In diesem Koordinatensystem habe der Beobachter am Ort B, die gemeinsame Kegelspitze K von Kegel 2 und 3, der Sonnenmittelpunkt  $M_1$  und der Mondmittelpunkt  $M_2$  die Koordinaten:

$$B: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad K: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad M_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad M_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die folgenden Abbildungen sollen die geometrischen Verhältnisse für den Fall der äußeren Ränderberührung aus der Sicht des Beobachters verdeutlichen.

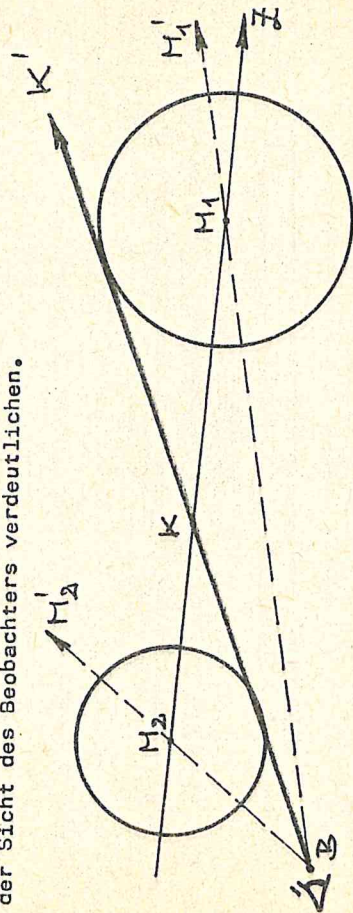


Abbildung 6 : Ränderberührung aus Beobachtersicht

Erinnern wir uns, daß mit dem Wert für P auch die Größe

$$g = \frac{-m' \pm P}{m''}$$

und damit ein Erdort gegeben ist.

Wir können deshalb aus dem globalen Verhalten von P auf die Sichtbarkeit der Ränderberührung von der Erde aus schließen:

- die Ränderberührung ist nirgends sichtbar, wenn  $P^2 < 0$  für alle p ist;
- zu jedem p gibt es einen Punkt der Erde, wo die Berührung sichtbar ist, wenn  $P^2 > 0$  für alle p ist;
- P verschwindet für zwei Werte von p, wenn  $P^2 > 0$  für  $p_1 \leq p \leq p_2$  und  $P^2 < 0$  sonst ist.

Zu den beiden ersten Fällen gehören drei reelle Wurzeln der Gleichung  $X^3 - AX^2 + BX - C = 0$ .

Zum dritten Fall gibt es eine reelle Wurzel für  $P^2 > 0$  und drei reelle Wurzeln für  $P^2 < 0$ .

Betrachten wir den zeitlichen Ablauf einer Finsternis, so ist zunächst nirgends auf der Erde eine Ränderberührung sichtbar, d.h. es ist  $P^2 < 0$  und die kubische Gleichung hat drei reelle Wurzeln.

Berührt der Schattenkegel die Erdoberfläche, dann wird für den Winkel  $p_1$ :  $P^2 = 0$ , entsprechend einer Doppelwurzel  $g' = g''$ .

Anschließend ist  $P^2 > 0$ , bis für den Winkel  $p_2$  wieder  $P^2 = 0$  wird, und danach der Fall  $P^2 < 0$  eintritt und die Finsternis endet.

Nach dieser notwendigen Diskussion des globalen Verhaltens wollen wir einen möglichen Lösungsweg für unser Problem

Dazu gehen wir wieder zu der Variablen  $t = \tan(p/2)$  über und erhalten die beiden quadratischen Gleichungen

$$t^2 + 2 \frac{c+R'}{a+g-(b+R)} t + \frac{a+g+(b+R)}{a+g-(b+R)} = 0$$

$$t^2 + 2 \frac{c-R'}{a+g-(b-R)} t + \frac{a+g+(b-R)}{a+g-(b-R)} = 0$$

mit den Lösungen

$$t_{1/2} = - \frac{c+R'}{a+g-(b+R)} \pm \frac{\sqrt{(b+R)^2 + (c+R')^2 - (a+g)^2}}{a+g-(b+R)}$$

$$t_{3/4} = - \frac{c-R'}{a+g-(b-R)} \pm \frac{\sqrt{(b-R)^2 + (c-R')^2 - (a+g)^2}}{a+g-(b-R)}$$

Die Form der Wurzelausdrücke erlaubt die Klassifikation der Lösungen  $t_1, \dots, t_4$ :

- 1) alle  $t_k$  komplex (und damit alle  $p_k$ ), wenn  
 und  $(b+R)^2 + (c+R')^2 < (a+g)^2$   
 und  $(b-R)^2 + (c-R')^2 < (a+g)^2$
- 2) alle  $t_k$  reell (und damit alle  $p_k$ ), wenn  
 und  $(b+R)^2 + (c+R')^2 > (a+g)^2$   
 und  $(b-R)^2 + (c-R')^2 > (a+g)^2$
- 3) zwei reelle  $t_k$  und zwei komplexe  $t_k$ , wenn  
 und  $(b+R)^2 + (c+R')^2 > (a+g)^2$   
 und  $(b-R)^2 + (c-R')^2 < (a+g)^2$   
 oder  
 und  $(b+R)^2 + (c+R')^2 < (a+g)^2$   
 und  $(b-R)^2 + (c-R')^2 > (a+g)^2$

Zu den Fällen 1) und 2) gehört die Existenz von drei reellen Wurzeln der kubischen Gleichung, während im Fall 3) nur eine reelle Wurzel existiert.

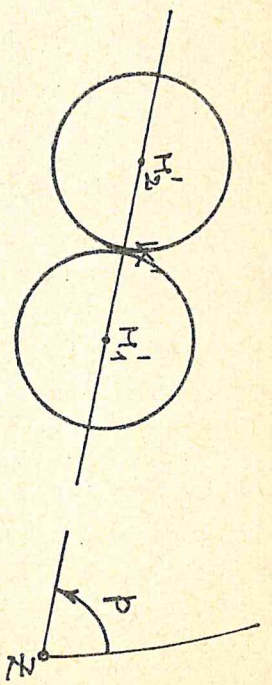


Abbildung 7 : Projektion an die Himmelskugel  
 p - Positionswinkel der Ränderberührung

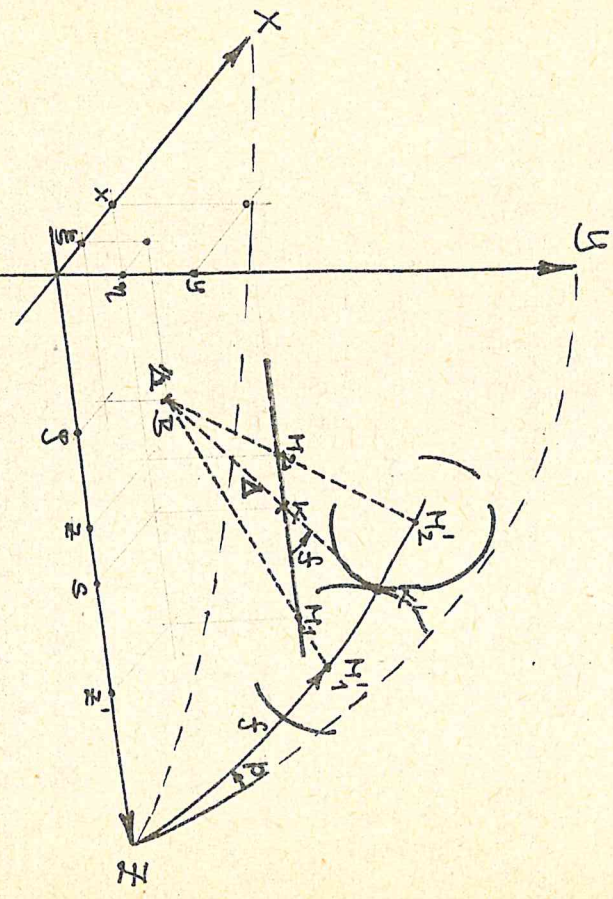


Abbildung 8 : Koordinaten der Punkte B, K, M1, M2

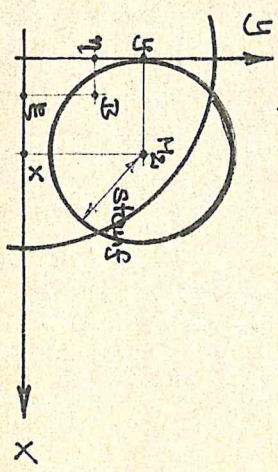


Abbildung 9 : die Beeselsche xy-Ebene

Der Verbindungsvektor  $\vec{BK}$  zwischen dem Ort des Beobachters B und der Kegelspitze K ist die Differenz der beiden Ortsvektoren zu den Punkten K und B. Schreiben wir die Koordinaten dieses Vektors unter Einbeziehung der beiden Winkel p und f in Polarkoordinaten, so erhalten wir mit  $\Delta$  als Abstand zwischen B und K

$$\begin{aligned} \Delta \cos \xi &= s - \xi \\ \Delta \sin f \cdot \cos \varphi &= y - \eta \\ \Delta \sin f \cdot \sin \varphi &= x - \xi \end{aligned}$$

Eliminieren wir aus den letzten beiden Gleichungen unter Verwendung der ersten Gleichung den Abstand  $\Delta$ , dann entstehen die Besselschen Hauptgleichungen für eine Sonnenfinsternis:

$$\begin{aligned} (s - \xi) \tan f \cos \varphi &= y - \eta \\ (s - \xi) \tan f \sin \varphi &= x - \xi \end{aligned} \quad (1)$$

Der Verbindungsvektor  $\vec{M_2M_1}$  der Mittelpunkte von Mond und Sonne ist die Differenz der Ortsvektoren zu den Punkten  $M_1$  und  $M_2$  und hat mit dem Abstand  $G = z' - z$  in geozentrischen Äquatorkoordinaten die einzelnen Koordinaten

$$\begin{aligned} G \cos \delta \cos \alpha &= r' \cos \delta' \cos \alpha' - r \cos \delta \cos \alpha \\ G \cos \delta \sin \alpha &= r' \cos \delta' \sin \alpha' - r \cos \delta \sin \alpha \\ G \sin \delta &= r' \sin \delta' - r \sin \delta \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Koordinaten von Sonne und Mond benutzt:  
 Sonne Abstand  $r'$  (AE), Rektaszension  $\alpha'$ , Deklination  $\delta'$   
 Mond Parallaxe  $\pi$ , Rektaszension  $\alpha$ , Deklination  $\delta$ .  
 Wählen wir als Entfernungsmaß die Mondparallaxe, dann wird aus der Mondentfernung

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{\sin \pi} \\ m &= \frac{\sin \pi}{r' \sin \pi} \end{aligned}$$

und mit

$$G = r'g \quad \text{und} \quad \nu = \nu'm$$

reellen Wurzeln liefert.

Bessel hat dieses Zerlegungsproblem erfolgreich gelöst. Die Gleichung  $P^2 = 0$  nimmt danach die Gestalt an

$$P^2 = \frac{1}{a+g} \{ a+g + (b+R) \cos p + (c+R') \sin p \} \cdot \{ a+g + (b-R) \cos p + (c-R') \sin p \}.$$

Dabei ist g eine reelle Wurzel der Gleichung dritten Grades

$$(a+x)(d-x)(f-x) - b^2(f-x) - c^2(d-x) - e^2(a+x) + 2bce = 0,$$

die mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= d+f-a \\ B &= b^2+c^2-e^2-a(d+f)+df \\ C &= b^2f+c^2d+e^2a-adf-2bce \end{aligned}$$

auch kürzer geschrieben werden kann:

$$X^3 - AX^2 + BX - C = 0$$

Die beiden Größen R und R' sind Wurzeln der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} R^2 &= b^2 - (a+g)(d-g) \\ R'^2 &= c^2 - (a+g)(f-g), \end{aligned}$$

wobei die Vorzeichen durch die Beziehung

$$RR' = bc - e(a+g)$$

festgelegt sind.

Von den drei Wurzeln g, g', und g'' der Gleichung

$$X^3 - AX^2 + BX - C = 0$$

ist eine, z.B. g, immer reell, während die beiden anderen Wurzeln g' und g'' reell oder zueinander konjugiert komplex sein können.

Zur Lösung der Gleichung  $P^2 = 0$  bestimmen wir die Wurzeln der beiden Quadratfaktoren

$$\begin{aligned} a+g + (b+R) \cos p + (c+R') \sin p &= 0 \\ a+g + (b-R) \cos p + (c-R') \sin p &= 0. \end{aligned}$$

$$P^2 = a + 2bc \cos p + 2c \sin p + d \cos^2 p + 2e \cos p \sin p + f \sin^2 p,$$

wobei wir neue Konstanten a, b, c, d, e und f eingeführt haben.

Ersetzen wir  $\cos p$  und  $\sin p$  durch  $t = \tan(p/2)$  nach den folgenden Umformungen

$$\begin{aligned} \cos p &= \frac{\cos^2 \frac{p}{2} - \sin^2 \frac{p}{2}}{\cos^2 \frac{p}{2} + \sin^2 \frac{p}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{p}{2}}{1 + \tan^2 \frac{p}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \sin p &= \frac{2 \cos \frac{p}{2} \sin \frac{p}{2}}{\cos^2 \frac{p}{2} + \sin^2 \frac{p}{2}} = \frac{2 \tan \frac{p}{2}}{1 + \tan^2 \frac{p}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \end{aligned}$$

dann wird die Gleichung  $P^2 = 0$  eine Gleichung vierten Grades in t.

Die Lösung einer Gleichung vierten Grades ist durch Auflösungsformeln nur in Spezialfällen möglich, zumal hier die Koeffizienten a bis f Funktionen der Zeit und nur im Stundenabstand bekannt sind.

Im Fall einer Lösung erhalten wir vier Werte für t und, da die Auflösung von  $\tan(p/2) = t$  eindeutig ist, auch vier Werte für p, vorausgesetzt, daß überhaupt alle t-Werte reell sind.

Die Frage, ob zu einem gegebenen Zeitpunkt überhaupt vier Winkel p und damit vier gemeinsame Tangenten an Schattenkegel und Erdkugel möglich sind, ist für äußere Berührungen zu verneinen. In diesem Fall existieren nur maximal zwei solcher Tangenten und damit nur zwei Positionswinkel (die beiden anderen Winkel sind nicht reell).

Für innere Ränderberührung wäre der Fall denkbar, daß östlich und westlich je zwei Tangenten an die Erdkugel existieren könnten. Diese Möglichkeit wird aber durch die geometrischen Verhältnisse von Erdradius und Schattenradius ausgeschlossen.

Es existieren in jedem Fall höchstens zwei Berührungswinkel p und von den vier Lösungen t der Gleichung  $P^2 = 0$  sind nur zwei reell und die beiden anderen komplex.

Es muß demnach möglich sein, die Gleichung vierten Grades in ein Produkt von zwei Faktoren von zweitem Grad zu zerlegen, wobei jeweils nur ein Faktor die beiden möglichen

Substituieren wir diese beiden Größen in den Koordinatengleichungen und formen die beiden ersten Gleichungen durch Multiplikation mit  $\cos \alpha'$  und  $\sin \alpha'$  (bzw.  $\sin \alpha'$  und  $\cos \alpha'$ ) und Addition (bzw. Subtraktion) um, dann erhalten wir ein Gleichungssystem zur Berechnung der Rektaszension  $\alpha$  und der Deklination  $\delta$  des Punktes Z

$$\begin{aligned} (2) \quad g \cos \delta \cos(\alpha - \alpha') &= \cos \delta' - m \cos \delta' \cos(\alpha - \alpha') \\ g \cos \delta \sin(\alpha - \alpha') &= \sin \delta' - m \cos \delta' \sin(\alpha - \alpha') \\ g \sin \delta &= m \sin \delta' \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Mondes und der Sonne lassen leicht aus den geometrischen Beziehungen ableiten. Wir erhalten im Einzelnen die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} (3) \quad z &= r' (\sin \delta' \sin \delta + \cos \delta \cos \delta' \cos(\alpha - \alpha')) \\ y &= r' (\cos \delta' \sin \delta - \sin \delta \cos \delta' \cos(\alpha - \alpha')) \\ x &= r' \cos \delta' \sin(\alpha - \alpha') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad z' &= r' (\sin \delta' \sin \delta' + \cos \delta' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha')) \\ y' &= r' (\cos \delta' \sin \delta' - \sin \delta' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha')) \\ x' &= r' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha') \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise gewinnen wir für die Koordinaten des Beobachters B die Darstellung

$$\begin{aligned} (5) \quad y &= g (\sin \delta \sin \varphi_{||} + \cos \delta \cos \varphi_{||} \cos(\mu - \alpha)) \\ z &= g (\cos \delta \sin \varphi_{||} - \sin \delta \cos \varphi_{||} \cos(\mu - \alpha)) \\ x &= g \cos \varphi_{||} \sin(\mu - \alpha) \end{aligned}$$

In diesen Formeln sind g der Abstand des Beobachters vom Erdmittelpunkt,  $\varphi_{||}$  die geozentrische Breite und  $\mu$  die Ortssterzeit. ( $\varphi_{||}$  s. S. 16).

Zum Gebrauch von Parallaxen als Entfernungsmaß in der Astronomie wollen wir noch einige Erläuterungen geben, die das Verständnis fördern sollen.

Zunächst seien alle Entfernungen in einem einheitlichen Maßstab (z.B. in km) gegeben. Für Sonne und Mond sind der Sinus der Parallaxen so definiert

$$\sin \pi_0 = \frac{R_0}{r'} > \sin \pi_0 = \frac{R_0}{r} >$$

mit dem Erdradius  $R_0$  und den Sonnen- und Mondentfernungen  $r'$  und  $r$ .

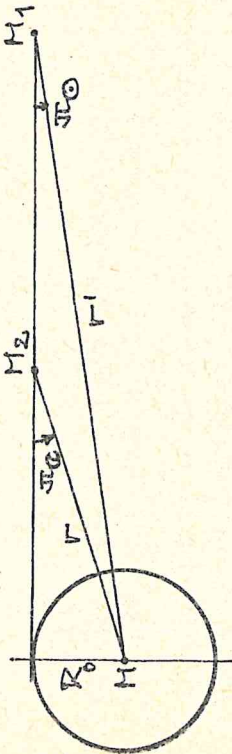


Abbildung 10 : Sonnen- und Mondparallaxe

Die Sonnenparallaxe wird im astronomischen Einheitensystem fixiert und auf die Standardentfernung  $A = 1 \text{ AE}$  bezogen, d.h.

$$\sin \pi_0 = \frac{R_0}{A}$$

Mit den modernen Werten für  $R_0$  und  $A$  hat die Sonnenparallaxe den Wert

$$\pi_0 = 8'' 794148$$

Den Sonnenabstand  $r'$ , in km gemessen, können wir umformen

$$r' = \frac{r'}{A} \cdot A = r'_A \cdot A >$$

mit  $r'_A$  als Sonnenabstand in AE gemessen (den Index  $A$  lassen wir später wieder weg).

Nun ist aber

$$A = \frac{R_0}{\sin \pi_0}$$

und damit

$$r' = r'_A \cdot A = r'_A \cdot \frac{R_0}{\sin \pi_0}$$

Der Mondabstand läßt sich ebenfalls durch die Parallaxe darstellen

$$r = \frac{R_0}{\sin \pi_0}$$

Wählen wir den Erdradius  $R_0$  zur Entfernungseinheit ( $R_0 = 1$ ), dann ist der Mondabstand gleich

$$r = \frac{1}{\sin \pi_0}$$

Beobachter am Horizont gesehen.

Die Bestimmung der Punkte der Horizontkurve als Menge aller Erdörter, für die die Ränderberührung am Horizont, d.h. bei Aufgang oder Untergang des Berührungspunktes, stattfindet, wird durch die Bedingung

$$P^2 = (m')^2 - m \cdot m'' = 0$$

festgelegt.

Die Größe  $P$  ist eine Funktion des Positionswinkels  $p$  der Ränderberührung, so daß die Bedingung  $P^2 = 0$  mögliche Positionswinkel  $p$  liefert, die dann eindeutig die Bestimmung des zugehörigen Erdortes gestatten.

Interessiert zunächst nur der Lösungsalgorithmus zur Berechnung der Horizontkurve, dann kann das folgende Kapitel übersprungen werden. Zur Begründung der einzelnen Schritte im Algorithmus ist es aber notwendig.

Mathematische Grundlagen zur Berechnung der Horizontkurve

Wir wenden uns jetzt der Auswertung der Gleichung  $P^2 = 0$  zu.

Da  $P^2$  die Form  $P^2 = (m')^2 - m \cdot m''$  hat und die Größen

$$m = a^2 + b^2 + c^2 - 1$$

$$m' = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

$$m'' = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

über die Beziehungen

$$a = x - z \sin p \quad \alpha = i \sin p$$

$$b = -(y - l \cos p) \sin d \quad \beta = \cos d - i \sin d \cos p$$

$$c = (y - l \cos p) \frac{\cos d}{\sqrt{1-e^2}} \quad \gamma = \frac{\sin d + i \cos d \cos p}{\sqrt{1-e^2}}$$

mit dem Positionswinkel  $p$  zusammenhängen, ist die Gleichung  $P^2 = 0$  eine Bestimmungsgleichung für diesen Winkel.

Wir fassen die Glieder in  $P^2$  so zusammen, daß die Abhängigkeit von  $\cos p$  und  $\sin p$  deutlich wird :

Wenn die Größe P verschwindet, ist die Lösung  $\int$  eindeutig und über u, v, w ist genau ein Erdort zu gegebenem Zeitpunkt t und zum Positionswinkel p bestimmt.

Es läßt sich zeigen, daß die Größe P in einfacher Weise mit der Zenittdistanz D des Berührungspunktes von Sonne und Mond aus der Sicht des Beobachters auf der Erde zusammenhängt.

Sind  $\alpha'$  und  $d'$  Rektaszension und Deklination des Berührungspunktes der Ränder, dann ist

$$\pm P = \frac{\sin d' \sin \varphi + \cos d' \cos \varphi \cos(\mu - \alpha' + \lambda)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos \delta}$$

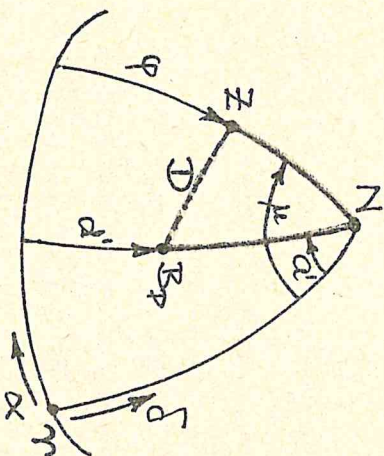


Abbildung 14 : sphärisches Dreieck N, Z, Bp

Aus dem sphärischen Dreieck N, Z, Bp folgt nach dem Kosinussatz für die Zenittdistanz D

$$\cos D = \sin \varphi \sin d' + \cos \varphi \cos d' \cos(\mu - \alpha')$$

Damit hat die Größe P die Gestalt

$$\pm P = \frac{\cos D}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos \delta}$$

Ist die Größe P gleich Null, dann ist die Zenittdistanz D gleich  $90^\circ$ . Die Ränderberührung wird in diesem Fall vom

Mit dieser Einheitenwahl entsteht z.B. aus der ersten Gleichung des o.g. Systems

$$g \cos d \cos \alpha = r' \cos \delta' \cos \alpha' - r \sin \delta \cos \alpha$$

die Gleichung mit den beiden neuen Größen g und m

$$\begin{aligned} \frac{g}{r'} \cos d \cos \alpha &= \cos \delta' \cos \alpha' - \frac{r}{r'} \sin \delta \cos \alpha \\ &= \cos \delta' \cos \alpha' - \frac{R_0}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{r_A \cdot R_0} \sin \delta \cos \alpha \\ &= \cos \delta' \cos \alpha' - m \sin \delta \cos \alpha \end{aligned}$$

Wir kehren jetzt zu unserem Ausgangspunkt zurück und betrachten die äußere Ränderberührung.

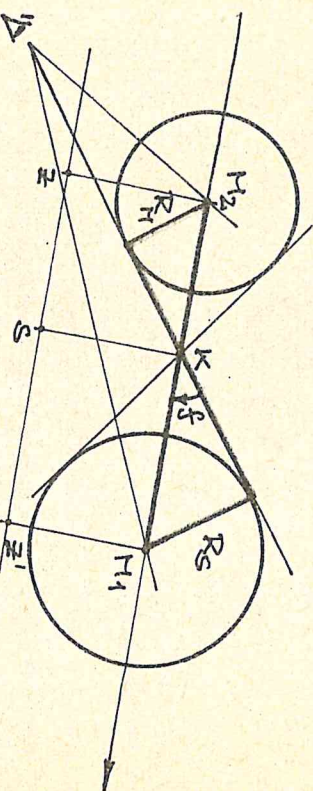


Abbildung 11 : die äußere Ränderberührung

Wie wir aus Abbildung 11 entnehmen können, müssen bei der äußeren Ränderberührung die beiden Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} (z_1 - s) \cdot \sin \delta &= R_2 \\ (s - z_2) \cdot \sin \delta &= R_1 \end{aligned}$$

Wir lösen diese Gleichungen nach s und sin delta auf

$$\sin \delta = \frac{R_2 + R_1}{z_1 - z_2}, \quad s = \frac{z_1 R_2 + z_2 R_1}{R_2 + R_1}$$

Der Ausdruck für sin delta können wir umformen, wenn wir die Betrachtungen zur Parallaxe einbeziehen.

Aus sin f wird dann

$$\sin f = \frac{R_s + R_m}{G} = \frac{R_s + R_m}{R_0} = k' + k = \frac{G}{R_0}$$

Dabei sind k' und k die Verhältnisse von Sonnen- bzw. Mondradius zum Erdradius.

Mit  $G = r \cdot g = r' \cdot g \cdot A = \frac{R_0}{A \cdot g} \cdot \sin \pi_0$

und  $k' = \frac{R_s}{R_0} = \frac{R_s}{A \cdot R_0} = \sin h \cdot \frac{1}{\sin \pi_0}$

wird aus dem Ausdruck für sin f

$$\sin f = \frac{k + \frac{\sin h}{\sin \pi_0}}{r' \cdot g \cdot \sin \pi_0}$$

oder  $\sin f = \frac{1}{r' \cdot g} (\sin h + k \cdot \sin \pi_0)$ .

Die Größe H ist über das Verhältnis von Sonnenradius zur astronomischen Einheit A definiert

$$H = \arcsin \left( \frac{R_s}{A} \right)$$

Für Sonnenfinsternisse benutzt man einen Wert für H, den Auwers eingeführt hat und bei dem die Oberstrahlung durch die Sonne berücksichtigt wird,

$$H = 959'' 63$$

Der Klammersausdruck bei sin f ist für alle Zeitpunkte konstant und hat für die äußere Ränderberührung den Wert

$$A_+ = 4,664018956 \cdot 10^{-3}$$

und für die innere Ränderberührung den Wert

$$A_- = 4,640782533 \cdot 10^{-3}$$

Bei der Berechnung von A<sub>+</sub> und A<sub>-</sub> haben wir noch die modernen Werte für k und π<sub>0</sub> einbezogen

$$k = 0,2725026$$

$$\pi_0 = 8'' 794148$$

Aus der quadratischen Gleichung gewinnen wir die Größe S und damit die drei Variablen u, v und w. Mit dem Gleichungssystem (7) können wir dann die beiden Koordinaten φ<sub>i</sub> und ω des Erdortes berechnen.

Aus den bisherigen Überlegungen wird deutlich, daß das Problem der Ortsbestimmung für den Fall der Ränderberührung gelöst ist, wenn wir zu einem gegebenen Zeitpunkt t den Positionswinkel p der Ränderberührung kennen. Die weiteren Betrachtungen dienen deshalb dazu, Bedingungen anzugeben, die eine Bestimmung dieses Positionswinkels gestatten.

Wir bilden jetzt aus den Größen a, b, c und α, β, γ neue Größen

$$m = a^2 + b^2 + c^2 - 1$$

$$m' = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

$$m'' = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$(a + \alpha \gamma)^2 + (b + \beta \gamma)^2 + (c + \gamma)^2 = 1$$

nach S hat die Form

$$S = \frac{-m' \pm P}{m''}, \text{ mit } P^2 = (m')^2 - m \cdot m''$$

Dieses Ergebnis läßt sich leicht durch Nachrechnen bestätigen.

Mit diesen Werten für S haben die Gleichungen für u, v und w die Gestalt

$$m''u = m''a - m'\alpha \pm \alpha P$$

$$m''v = m''b - m'\beta \pm \beta P$$

$$m''w = m''c - m'\gamma \pm \gamma P$$

Beachten wir die Gestalt der Größen m, m' und m'' aus ihrer Definition, dann können wir die Größe P angeben als

$$\pm P = \alpha u + \beta v + \gamma w$$



Für die Ränderberührung gelten die Besselschen Hauptgleichungen

$$\eta = y - (s - \beta) \tan f \cos p$$

$$\xi = x - (s - \beta) \tan f \sin p$$

Lösen wir das Gleichungssystem für  $\beta$ ,  $\eta$  und  $\xi$  nach den Variablen  $u$ ,  $v$  und  $w$  auf und ersetzen  $\eta$  und  $\xi$  aus den Hauptgleichungen, dann erhalten wir ein Gleichungssystem, das nur noch die Variable  $\beta$  enthält:

$$u = x - (s - \beta) \tan f \sin p$$

$$v = -y \sin p + (s - \beta) \tan f \cos p + \beta \cos p$$

$$\sqrt{1 - e^2} \cdot w = y \cos p - (s - \beta) \tan f \cos p + \beta \sin p$$

Mit den Abkürzungen

$$f = s \cdot \tan f$$

$$a = x - f \sin p$$

$$b = -(y - f \cos p) \sin p$$

$$c = (y - f \cos p) \frac{\cos p}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$i = \tan f$$

$$\alpha = i \sin p$$

$$\beta = \cos p - i \sin p \cos p$$

$$f = \frac{\sin p + i \cos p \cos p}{\sqrt{1 - e^2}}$$

hat das Gleichungssystem die einfache Form

$$(8) \quad u = a + \alpha \beta$$

$$v = b + \beta f$$

$$w = c + f \beta$$

Da zwischen den Größen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die Relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

besteht, haben wir zur Bestimmung der Variablen  $\beta$  die quadratische Gleichung

$$(a + \alpha \beta)^2 + (b + \beta f)^2 + (c + f \beta)^2 = 1$$

Mit den letzten Gleichungen zeichnet sich ein Lösungsweg für die gestellte Aufgabe ab:

Zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t$  und für einen Winkel  $p$  der Ränderberührung lassen sich alle bisher eingeführten Größen berechnen, speziell auch

$$a, b, c \quad \text{und} \quad \alpha, \beta, f$$

Der Radius des Schattenkreises in der Besselschen Ebene ist gleich  $s \cdot \tan f$ .

Wie wir aus der Abbildung 12 entnehmen können, ist dieser Radius für die äußere Ränderberührung auch gleich

$$s \cdot \tan f = z \cdot \tan f + k \cdot \sec f$$

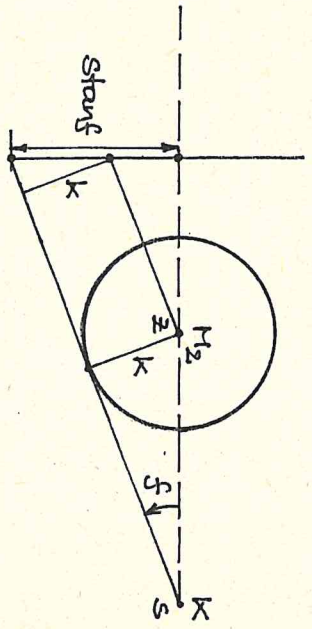


Abbildung 12 : der Radius des Schattenkreises

Das Gleichungssystem

$$(6_1) \quad \sin f = \frac{A_+}{r_1 g}$$

$$s \tan f = z \tan f + k \sec f$$

erlaubt die Berechnung der drei für die Ränderberührung wichtigen Größen

$$s, \quad i = \tan f, \quad f = s \cdot \tan f$$

Für den Fall der inneren Ränderberührung hat das Gleichungssystem die Gestalt

$$(6_2) \quad \sin f = \frac{A_-}{r_1 g}$$

$$s \tan f = z \tan f - k \sec f$$

Die Ränderberührung und der zugehörige Erdort

Den Zusammenhang zwischen der geozentrischen Breite  $\varphi_{||}$  und der geographischen Breite  $\varphi$  können wir aus der Abbildung 13 ablesen.

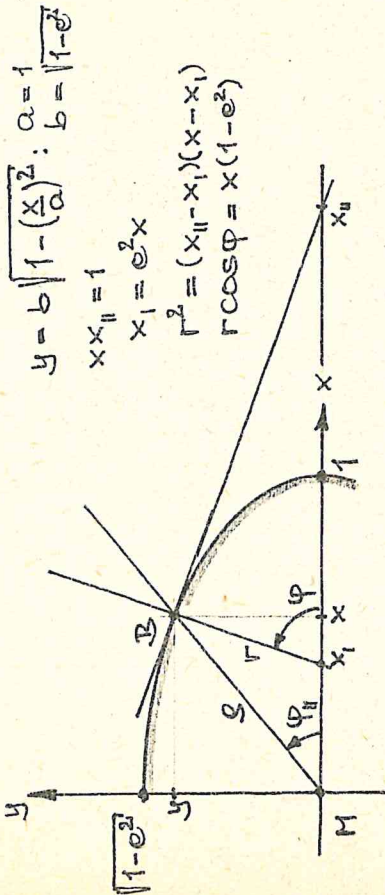


Abbildung 13 : geozentrische und geographische Breite

Die beiden Breiten stehen in dem Zusammenhang

$$\cos \varphi_{||} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} > \sin \varphi_{||} = \frac{(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

In diesen Formeln ist  $e$  die Exzentrizität der Erdmeridiane. Diese Exzentrizität ist durch das Verhältnis von Polradius  $b$  zu dem Äquatorradius  $a$  definiert

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Die geometrische Abplattung  $\alpha$  des Erdkörpers ist dagegen das folgende Verhältnis der beiden Erdradien

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a}$$

Wir können damit die Exzentrizität aus der Abplattung ableiten.

Die Festlegungen der IAU von 1976 bestimmen den Wert von

$$\alpha \text{ zu : } \alpha = 1/298,257$$

Daraus ermitteln wir den Wert von  $e$  zu :  $e = 6,181912158 \cdot 10^{-2}$

Aus dem System für die Koordinaten des Erdortes

$$\xi = \rho (\sin \delta \sin \varphi_{||} + \cos \delta \cos \varphi_{||} \cos(\mu - \alpha))$$

$$\eta = \rho (\cos \delta \sin \varphi_{||} - \sin \delta \cos \varphi_{||} \cos(\mu - \alpha))$$

$$\xi = \rho \cos \varphi_{||} \sin(\mu - \alpha)$$

gewinnen wir durch Substitution :

geozentrische Breite  $\rightarrow$  geographische Breite  $\rightarrow$  Hilfswinkel  $\varphi_1$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} > \sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

das neue Gleichungssystem

$$\xi = \sin \delta \sin \varphi_1 \sqrt{1 - e^2} + \cos \delta \cos \varphi_1 \cos(\mu' - \alpha + \omega)$$

$$\eta = \cos \delta \sin \varphi_1 \sqrt{1 - e^2} - \sin \delta \cos \varphi_1 \cos(\mu' - \alpha + \omega)$$

$$\xi = \cos \varphi_1 \sin(\mu' - \alpha + \omega)$$

Zwischen dem Hilfswinkel  $\varphi_1$  und der geographischen Breite  $\varphi$  besteht der Zusammenhang

$$\tan \varphi_1 = \sqrt{1 - e^2} \cdot \tan \varphi$$

Durch Einführung der geographischen Länge  $\omega$  haben wir die Ortssternzeit  $\mu$  durch die Sternzeit  $\mu'$  am Nullmeridian ersetzt

$$\mu = \mu' + \omega$$

Benutzen wir weiter anstelle der Unbekannten  $\varphi_1$  und  $\omega$  die neuen Variablen  $u, v$  und  $w$

$$(7) \quad \begin{cases} u = \cos \varphi_1 \cdot \sin(\mu' - \alpha + \omega) \\ v = \cos \varphi_1 \cdot \cos(\mu' - \alpha + \omega) \\ w = \sin \varphi_1 \end{cases}$$

so nimmt das Gleichungssystem die Gestalt an

$$\xi = w \sqrt{1 - e^2} \sin \delta + v \cos \delta$$

$$\eta = w \sqrt{1 - e^2} \cos \delta - v \sin \delta$$

$$\xi = u$$