Pil

MATHEMATIK für die ASTRONOMIE

KULTURBUND DER DDR

Zentrale Kommission Astronomie und Raumfahrt – Arbeitskreis „Numerische Astronomie"

Veröffentlichung 2 Leipzig 1986

Berechnung von Ephemeriden fuer Planeten, Planetoiden und Kometen aus den Bahnelementen mittels Heim-Computer

1. Einleitung

Die Beobachtung von Planeten und Planetoiden sowie von Kometen erfordert die Kenntnis der jeweils momentanen Orte, die fuer manche Objekte (Planeten, grosse Planetoiden) in geeigneten Jahrbuechern (z.B. dem "Kalender fuer Sternfreunde") fuer bestimmte Zeitpunkte angegeben werden. Durch Interpolation kann ein Beobachter daraus die Orte fuer den gewuenschten Beobachtungszeitpunkt entnehmen. Solche Angaben geozentrischer Oerter werden von astronomischen Recheninstituten berechnet und als Ephemeriden bezeichnet.
Wenn es sich aber um kleinere Objekte handelt, fuer die solche Ephemeriden dem Amateur nur schwer zugaenglich sind, oder wenn ihm lediglich die Bahnelemente bei einem Kometen bzw. Planetoiden bekannt sind, ist es durchaus sinnvoll, wenn ein Amateur die Ephemeriden selbst berechnen kann. Darueberhinaus stellt die Freude an der theoretischen und rechentechnischen Bewaeltigung dieses Problems einen starken Antrieb fuer derlei Beschaeftigung dar.
Mit den programmierbaren Taschenrechnern und besonders mit den Heim-Computern stehen auch die praktischen Hilfsmittel fuer ein solches Verfahren bereit.
Der Arbeitskreis NUMERISCHE ASTRONOMIE hat sich ausfuehrlich mit der Berechnung von Ephemeriden und den erreichbaren Genauigkeiten beschaeftigt.
Mit dieser Arbeit wollen wir ein vereinfachtes Verfahren vorstellen, mit dem der rechentechnisch ausgeruestete Amateur einfache Aufsuchephemeriden berechnen kann.
Dabei soll der Wert nicht auf einer lueckenlosen Darstellung aller Ueberlegungen bestehen. Es soll einer spaeteren systematischen Darstellung von Bahnberechnungen im Sonnensystem vorbehalten bleiben, grundsaetzliche Zusammenhaenge zu erlaeutern und die verschiedenen Anforderungen an Genauigkeiten und ihre Auswirkungen auf den Rechengang zu beleuchten.
Die Absicht dieser Arbeit ist das Bereitstellen eines Formelapparates in numerisch zweckmaessiger Form und vereinfachter Verstehensmoeglichkeiten zur Berechnung von Aufsuchephemeriden. Dabei werden keine fertigen Rechenprogramme angegeben, die aber im Arbeitskreis NUMERISCHE ASTRONOMIE in verschiedenen Varianten vorhanden sind.
Vielmehr soll der interessierte Amateur in die Lage versetzt werden, nach den Moeglichkeiten seines Rechners das Programm selbst zu entwickeln.

Der allgemeine Rechengang wird an einem Testbeispiel demon-. striert. Hierfuer haben wir den mittleren Ort des Kometen HALLEY fuer den 1. 11. 1985 0.00 UT gewaehlt, weil sich unser Rechenverfahren auch beim Aufsuchen des Kometen HALLEY be-waehrt hat.
Die Bahnelemente entstammen der Zeitschrift "Sky and Telescop", Dec. 1984 .

Da Heimcomputer die Argumente der Winkelfunktionen unter-schiedlich im Gradmass oder Bogenmass verlangen, haben wir uns fuer das haeufiger anzutreffende und mathematisch einfacher zu handhabende Bogenmass entschieden. Erst am Ende der Berech-nung werden daraus die Rektaszension in Stunden und die Dekli-nation in Grad ermittelt.
Das vereinfachte Rechenverfahren erlaubt auch den Einsatz von nur sechsstelligen Rechneren, wobei acht Stellen vorteilhafter sind. Eine genauere Berechnung unter Beruecksichtigung der Stoerungen verlangt mindestens achtstellige Genauigkeit, zehn bis zwoelf Stellen sind dafuer zweckmaessig.
Das Testbeispiel ist mit acht Stellen angegeben. Diese repraesen-tieren nicht die vom Verfahren gelieferte Genauigkeit, sondern sollen dem Anwender die Ueberpruefung der Numerik erleichtern.

Die gewaehlten Vereinfachungen des angegebenen Verfahrens betreffen erstens die Vernachlaessigung von Stoerungen und zweitens die Vernachlaessigung der langsamen Veraenderungen der Bahnelemente.
Die Vernachlaessigung von Stoerungen bei der Betrachtung des reinen Zweikoerperproblems Sonne - Erde einerseits und Sonne - Komet/Planet andererseits hat um so geringere Auswirkungen, je naeher sich das betrachtete Objekt an der Sonne aufhaelt, je weiter es vom Jupiter entfernt ist und je groesser seine Masse ist.
Die Vernachlaessigung der langsamen Veraenderungen der Bahn-elemente faellt um so weniger ins Gewicht, je geringer der durch die Ephemeridenrechnung ueberstrichene Zeitraum ist und je besser die Bahnelemente genau fuer diesen Zeitpunkt gelten.
Der "Kalender fuer Sternfreunde", dem der Amateur u.a. die Bahnelemente fuer Planeten und z.T auch fuer Planetoiden entnehmen kann, fuehrt 1985 fuer die inneren Planeten die mittleren Bahnelemente an, fuer die aeussern Planeten jedoch sogenannte "oskulierende" Elemente, die im "Kalender fuer Sternfreunde" 1984, S. 34 genauer erlaeutert werden.
Wir schaetzen, dass mit dem angegebenen Verfahren fuer Planeten eine Genauigkeit von 0.1 Grad erreicht wird. Das reicht fuer Aufsuchephemeriden aus. Eine groessere Genauigkeit ist nicht allein durch einen genaueren Rechner, sondern durch einen genaueren Algorithmus zu erreichen, der Stoerungen und lang-same Entwicklung der Bahnelemente beruecksichtigt.
Erst dann ist es sinnvoll, aus den berechneten Oertern zur Epoche der Bahnelemente auf mittlere Orte zum Datum durch Praezessions-beruecksichtigung oder gar auf wahre Orte durch Beruecksichtigung der Nutation und weiter auf scheinbare Orte durch Beruecksichtigung der Abbereation und schliesslich auf beobachtbare Orte durch Beruecksichtigung der Refraktion zu schliessen.
Die hier angegebenen mittleren Orte gelten fuer das Aequinok-tium der Bahnelemente. Wir haben das Aequinoktium 1950.0 gewaehlt. Die berechnete Werte lassen sich im Atlas Eclipticalis 1950.0 also unmittelbar eintragen.

Die Abweichung der mit Stoerungen berechneten scheinbaren Oerter fuer 1986.0 zu den mittleren Oertern fuer 1950.0 betrug etwa 2 min in Rektaszension, war also fuer die Identifikation eines unbekannten Objektes relevant und musste beim Aufsuchen am Himmel und beim Eintragen in Sternkarten beruecksichtigt werden.

2. Bahnform, Bahnelemente

Der Komet HALLEY bewegt sich wie die meisten Kometen auf einer elliptischen Bahn um die Sonne.
Die KEPLERschen Gesetze beschreiben seine Bahn bezueglich des Gravitationszentrums, also seine heliozentrische Bahn.
Als Aufsuchephemeride wird jedoch der geozentrische Ort benoetigt.
Die geozentrischen Koordinaten lassen sich aus den heliozentrischen berechnen, wenn man mittels heliozentrischer Koordinaten der Erde die Erde als Koordinatenursprung einfuehrt. So ist also grundsaetzlich die Berechnung geozentrischer Koordinaten begruendet auf zwei getrennte heliozentrische Bahnberechnungen fuer denselben Zeitpunkt (Bahn des Planeten/Kometen um die Sonne und Bahn der Erde um die Sonne) und geeignete Koordinatentransformationen.
Als System der Bahnelemente verwenden wir folgende Groessen:

a	grosse Halbachse
e	Exzentrizitaet der Bahnellipse
T	Zeitpunkt des Periheldurchgangs
i	Neigung der Kometenbahn gegen die Ekliptik
ω	Winkelabstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten
Ω	Laenge des aufsteigenden Knotens

Von der Erdbahn benoetigen wir ausserdem

ϵ	Schiefe der Ekliptik

Waehrend a,e und T die Bewegung in der ebenen Ellipsenbahn des Planeten oder Kometen beschreiben, bestimmen i, ω , Ω und ϵ die Lage dieser Bahnellipse bezueglich der Erdbahn.
Die Bahnelemente werden in erster Naeherung als Konstante angesehen.
Fuer genauere Berechnungen ist ihre langsame Veraenderlichkeit zu beruecksichtigen. Die Bahnelemente berechnen sich dann aus Polynomen der Zeit.
Ausserdem gelten die Bahnelemente nur streng fuer das ungestoerte Zweikoerperproblem. Muessen stoerende Wirkungen (z.B. der Planeten) beruecksichtigt werden, dann sind gewisse Korrekturen an verschiedenen Stellen des Rechengangs anzubringen.
Ausserdem lassen sich sogenannte oskulierende Elemente verwenden.
Sie gelten jedoch nur fuer einen eingeschraenkten Zeitraum.
Fuer Kometen ergeben sich darueberhinaus staendig Korrekturen an den Bahnelementen durch jeweils genauere bzw. laenger dauernde astronomische Beobachtungen.
Wir verwenden fuer unser Beispiel - HALLEYs Komet - folgende Zahlenwerte fuer die Elemente:

a	17.9411044 AE
e	0.967276
T	1986 Februar 9.45175
i	162.23923 Grad
ω	111.84809 Grad
Ω	58.14536 Grad
ϵ	23.445789 Grad

Die Bahnlage-Elemente gelten fuer das Aequinoktium 1950.0. Wir erhalten deswegen sogenannte astrometrische Koordinaten, die wir ohne zusaetzliche Beruecksichtigung von Praezession in einem Sternatlas 1950.0 (z.B. Atlas Eclipticales 1950.0 oder Falkauer Atlas 1950.0) aufsuchen koennen.
Fuer einen Atlas mit einem kleineren Maszstab (z.B. Sternatlas 1975.0 von Marx & Pfau) sind die Koordinatenaenderungen so unerheblich, dass sich die Abweichung des Aequinoktums gegenueber 1950.0 nicht auswirkt.
Auf die Berechnung sogenannter beobachtbarer Koordinaten, nach denen wir die Teilkreise eines parallaktisch aufgestellten Fernrohres einstellen muessen, um den Planeten am richtigen Wert von Rektaszension und Deklination entdecken zu koennen, verzichten wir hier.
Die Beruecksichtigung von Praezession, Nutation, Abberation und Refraktion braechte eine erhebliche Erweiterung des Rechenganges mit sich. Zum Berechnen einer Aufsuchephemeride ist ihre Beruecksichtigung nicht erforderlich.
Wir werden diese Probleme in einer zukuenftigen Veroeffentlichung behandeln.
Die Bahnberechnung erfolgt aus den ersten drei Bahnelementen durch Loesung der KEPLERschen Gleichung in Polarkoordinaten. Diese liefert uns den Ort des Planeten bezogen auf die Bahnellipse. Die Transformation auf rechtwinklige Koordinaten in der Erdbahnebene erfolgt durch Beruecksichtigung der Bahnlage-Elemente.

2. Die KEPLERgleichung

Die KEPLERgleichung beschreibt die Bewegung der Koerper eines Zweikoerpersystems.
Sie ist aus den NEWTONschen Gravitationsgesetzen bzw. aus den KEPLERschen Gesetzen ableitbar.
Fuer die Bewegung eines leichten Koerpers um ein massereiches Zentralgestirn wird die Bewegung des umkreisenden Koerpers durch

$$E-e*\mathrm{SIN}(E)=M \qquad (1)$$

beschrieben.
M ist hier die mittlere Anomalie, also der Winkelabstand des Koerpers vom Perihel, der sich zu einem bestimmten Zeitpunkt ergaebe, wenn sich der Koerper mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit bewegte.
Um die mittlere Anomalie fuer einen Zeitpunkt t zu berechnen, benoetigen wir die Perihelzeit T und die mittlere taegliche Bewegung n:

$$M=n*(t-T) \qquad (2)$$

Um n zu berechnen, benutzt man das dritte KEPLERsche Gesetz:

$$(a\hat{}3)/(U\hat{}2)=\gamma/(4*pi) \qquad (3)$$

Daraus folgt:

$$n\hat{}2=\gamma*(ms+mp)/(a\hat{}3) \qquad (4)$$

ms: Sonnenmasse
mp: Planetenmasse

Fuer mp<<ms, was fuer Kometen und Planetoiden immer zutrifft, kann vereinfacht werden:

n^2= γ *ms/(a^3) (5)

oder

n^2=(2.9571938E-4 AE^3/d^2)/(a^3) (6)

wobei

γ =6.668E-11 Nm^2/kg
ms =1.989E30 kg
und 1AE=149.598E9 m

fest eingesetzt werden.
Man erhaelt n in rad/d.

Beispiel: Komet HALLEY

a=17.9411044 AE n=2.262906E-4 rad/d = 1.2965496E-2 grd/d

Die exzentrische Anomalie E, welche den tatsaechlichen Winkelabstand vom Perihel zur Zeit t darstellt, laesst sich aus M und e mit der Keplergleichung (1) berechnen.
Diese Gleichung ist fuer e<>0 nicht nach E aufloesbar, es muss ein Naeherungsverfahren angewendet werden.
Fuer kleine Exzentrizitaeten (Planetenbahnen) genuegt das allgemeine Iterationsverfahren:

E(0)=M (7)
E(k+1)=M+e*SIN(E(k)) (8)

(8) wird sooft wiederholt, bis E(k) und E(k+1) genuegend gut uebereinstimmen.
Das ist bei den kleinen Exzentrizitaeten der Planetenbahnen nach wenigen Runden der Fall.

Fuer Exzentrizitaeten nahe 1 (Kometenbahnen) sollte besser das NEWTON-Verfahren verwendet werden, welches eine bessere Konvergenz aufweist:

E(0)=M
E(k+1)=E(k)-(m+e*SIN(E(k))-E(k))/(e*COS(E(k))-1) (9)

(9) wird wieder bis zur Konvergenz wiederholt.

Beispiel: Komet HALLEY am 1.11.85, 0.00 UT

JD=2446370.5
T=2446470.95175
t-T=-100.45175
n=2.262906E-4 rad/d
M=-0.022731286 rad
e=0.967276
E=-0.39450532 rad
(k=123 fuer allg. Iterationsverf.
k= 7 fuer NEWTON-Verf.)

4. Bestimmung heliozentrischer Koordinaten

Um aus dem Winkel E die heliozentrischen Koordinaten l, b, und r zu gewinnen, ist eine Koordinatentransformation aus dem Koordinatensystem der Bahnebene in das Ekliptiksystem notwendig. Dazu wird in der Bahnebene ein kartesisches Koordinatensystem eingefuehrt:

x-Achse: Sonne-Perihel
y-Achse: senkrecht zur x-Achse in der Bahnebene
z-Achse: senkrecht zur x- und y-Achse

Die entsprechende Koordinaten lassen sich durch folgende Formeln berechnen:

```
x0=a*COS(E)-a*e                (10)
y0=a*SQR(1-e*e)*SIN(E)         (11)
z0=0                           (12)
```

Nun sind drei Drehungen notwendig:

1. Drehung um die z-Achse mit dem Winkel ω
2. Drehung um die x-Achse mit der Bahnneigung i
3. Drehung um die z-Achse mit dem Winkel Ω

Man erhaelt dadurch die kartesischen Koordinaten des Ekliptiksystems xp, yp und zp.

Die Drehungen werden wie folgt durchgefuehrt:
Es gilt fuer 1.

```
x1=x0*COS( ω )-y0*SIN( ω )     (13)
y1=x0*SIN( ω )+y0*COS( ω )     (14)
z1=z0                          (15)
```

Bei 2. und 3. sind statt ω die Winkel i bzw. Ω einzusetzen und bei 2. zusaetzlich die Koordinaten zyklisch zu vertauschen.

Beispiel: Komet HALLEY am 1.11.86 0.00 UT

```
x0=-0.79100877 AE
y0=-1.7496197 AE
z0=0

x1=1.9183227 AE
y1=-0.083077892 AE
z1=0

x2=1.9183227 AE
y2=0.079118295 AE
z2=-0.025342287 AE

xp=0.94522333 AE
yp=1.6711596 AE
zp=-0.025342287 AE
```

Aus xp,yp und zp koennen die heliozentrischen Koordinaten l,b und r berechnet werden:

```
r=SQR(xp*xp+yp*yp+zp*zp)                          (18)
b=ASN(zp/r)                                       (19)
l=ATN(yp/xp)      Quadrant beachten !             (20)
```

Beispiel: Komet HALLEY 1.11.85 0.00 UT

r=1.9201208 AE
b=-0.013198661 rad
l=1.0560481 rad

5. Bestimmung geozentrischer Koordinaten

Um geozentrische Koordinaten zu erhalten, ist zunaechst der heliozentrische Erdort zu bestimmen.
Dazu werden wieder die Keplergleichung und die Koordinatentransformation verwendet.
Mit den Bahnelementen fuer die Erde:

a=1.00000 AE
e=0.01671
T=2446069.3359
i=0
ω =1.78163 rad
Ω =0
n=0.017202122 rad/d (nach:Landolt-Boernstein '81)

erhaelt man xe,ye und ze.

Beispiel: Erde am 1.11.85 0.00 UT

xe=0,78630059 AE
ye=0.60542032 AE
ze=0

Jetzt laesst sich der Vektor Erde-Planet berechnen:

```
xpe=xp-xe                                         (21)
ype=yp-ye                                         (22)
zpe=zp-ze                                         (23)
```

Aus diesem koennen die Ekliptikkordinaten λ, β und Δ ermittelt werden:

Δ =SQR(xpe*xpe+ype*ype+zpe*zpe) (24)
β =ASN(zpe/ Δ) (25)
λ =ATN(ype/xpe) Quadrant beachten ! (26)

Um Aequatorkoordinaten zu erhalten, ist noch eine Drehung um die x-Achse mit der Schiefe der Ekliptik ϵ noetig.

Die dadurch erhaltenen kartesischen Aequatorkoordinaten xae,yae und zae muessen nun noch in die Kugelkoordinaten α und δ umgerechnet werden.

δ =ASN(zae/ Δ) (27)
α =ATN(yae/xae) Quadrant beachten ! (28)

Beispiel: Komet HALLEY am 1.11.85 0.00 UT

```
xpe=0.15842263 AE
ype=1.0657393 AE
zpe=-0.025342287 AE

λ=1.4232265 rad = 81.544371 grd
β=-0.023516284 rad = -1.3473839 grd
Δ=1.0777478 AE

α=1.4117809 rad = 5 h 23.556348 '
δ=0.38095727 rad = 21.827244 grd
```

6. Verwendung der GAUSSschen Konstanten

Die Rechnung mit den GAUSSschen Konstanten stellt einen anderen Weg zur Berechnung der Ephemeriden dar.
Die GAUSSschen Konstanten sind das Ergebnis der Umwandlung der Bahnelemente in eine numerisch zweckmaessige Form.
Sie werden aus diesen durch den folgenden Formelsatz berechnet:

```
H1=SIN( ω )*SIN(i)                                      (29)
H2=COS( ω )*SIN(i)                                      (30)
H3=SIN( Ω )*COS( ω )+COS( Ω )*SIN( ω )*COS(i)           (31)
H4=SIN( Ω )*SIN( ω )-COS( Ω )*COS( ω )*COS(i)           (32)

Px=COS( Ω )*COS( ω )-SIN( Ω )*SIN( ω )*COS(i)           (33)
Py=COS( ε )*H3-SIN( ε )*H1                              (34)
Pz=SIN( ε )*H3+COS( ε )*H1                              (35)

x  Qx=-COS( Ω )*SIN( ω )-SIN( Ω )*COS( ω )*COS(i)       (36)
z  Qz=+COS( ε )*H2-SIN( ε )*H4                          (37)
y  Qy=+SIN( ε )*H2-COS( ε )*H4                          (38)
```

Zur weiteren Rechnung stehen nun die GAUSSschen Konstanten Px, Py, Pz, Qx, Qy, Qz zur Verfuegung. Die Hilfsgroessen H1 - H4 werden nicht mehr benoetigt.

Die Loesung der KEPLERgleichung (s.v.) liefert die exzentrische Anomalie E.
Aus dieser werden zunaechst zwei Terme berechnet, die die wahre Anomalie v und den Sonnenabstand des Planeten enthalten:

```
CV=a*(COS(E)-e)             [=r*COS(v)]        (39)
SV=a*SQR(1-e*e)*SIN(E)      [=r*SIN(v)]        (40)
```

Die heliozentrischen kartesischen Koordinaten des Planeten erhaelt man jetzt einfach durch:

```
x=Px*CV+Qx*SV                                  (41)
y=Py*CV+Qy*SV                                  (42)
z=Pz*CV+Qz*SV                                  (43)
```

Aus diesen Koordinaten laesst sich der geozentrische Ort leicht berechnen:

```
xae=x(Planet)-x(Erde)                          (44)
yae=y(Planet)-y(Erde)                          (45)
zae=z(Planet)-z(Erde)                          (46)
```

Δ =SQR(xae*xae+yae*yae+zae*zae) (47)

Der grosse Vorteil der Verwendung der GAUSSschen Konstanten zeigt sich, wenn von einem Planeten zu mehreren Zeitpunkten Berechnungen ausgefuehrt werden sollen.
Dann sind die komplizierten und zeitaufwendigen Rechnungen; die bei diesem Verfahren im Berechnen der GAUSSschen Konstanten bestehen, nur einmal durchzufuehren.
Das bedeutet fuer den Handrechner eine grosse Arbeitseinsparung und fuer den Computer Rechenzeiteinsparung.

Beispiel: Erde am 1.11.85 0.00 UT

Px=-.2215485
Py=.89463804
Pz=.3879936

Qx=-.97514936
Qy=-.20325678
Qz=-.088149983

x=.78680069 AE
y=.55543497 AE
z=.24088537 AE

Beispiel: Halley geozentrisch am 1.11.85 0.00 UT

x=.94522332 AE
y=1.5432668 AE
z=.64167305 AE

xae=.15842263 AE
yae=.98783183 AE
zae=.40078769 AE

Δ =1.0777477 AE
α =1.4117763 rad
δ =.38102824 rad

Die berechneten Werte stimmen gut mit den Ergebnissen des Abschnitts 6 ueberein.

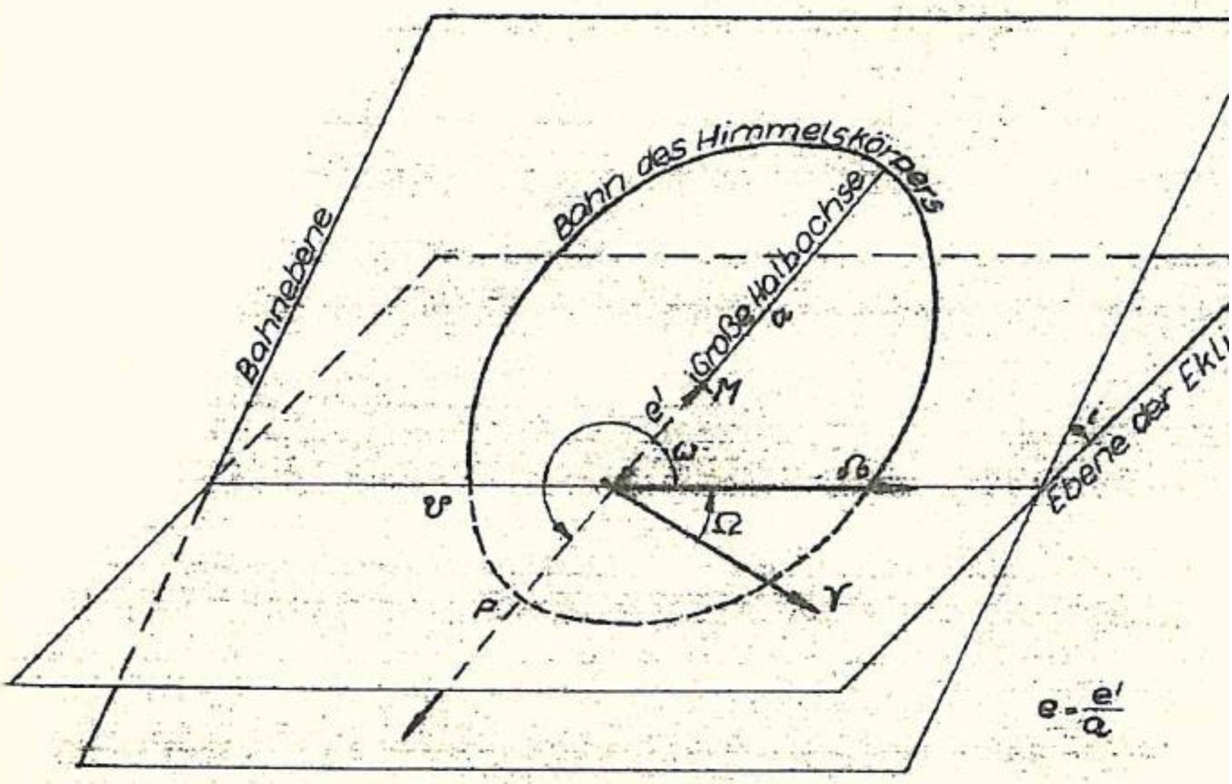
7. Anschriften der Autoren

Dieter Schille
Harkortstr. 21
Leipzig
7010

Uwe Pilz
Gorkistr. 27
Leipzig
7024

Die Autoren sind Mitglieder im

Arbeitskreis "Numerische Astronomie"
(Leiter: Dipl.-Phys. L. Ehrenberg)
Astronomisches Zentrum Schkeuditz
PSF 29
Schkeuditz
7144



Bahnebene
Bahn des Himmelskörpers
Große Halbachse
a
e'
M
ω
☊
☋
Ω
♈
P
Ebene der Ekli
$e = \frac{e'}{a}$