p. 4

MATHEMATIK für die ASTRONOMIE

KULTURBUND DER DDR

Zentrale Kommission Astronomie und Raumfahrt – Arbeitskreis „Numerische Astronomie"

Veröffentlichung 4 Leipzig 1987

In dieser Mitteilung werden Berechnungsmethoden aus verschiedenen Gebieten der Astronomie vorgestellt. Vorausgesetzt werden Kenntnisse zur Berechnung des Julianischen Datums und der Sternzeit. Auf ausführliche Erläuterungen wird zugunsten einer kurzen Darstellung des Rechenweges verzichtet. Hierüber informiert die populärwissenschaftliche Literatur, z.B. Brockhaus Astronomie.

1. Meridiandurchgang, Auf- und Untergang, Dämmerungszeiten

Mit der folgenden Anleitung können für beliebige geographische Orte diese Erscheinungen auf die Minute, bei Meridiandurchgängen abhängig von der Genauigkeit der Ausgangswerte auf die Sekunde genau berechnet werden. Diese Methode eignet sich für Gestirne, die ihre Position ungleichförmig ändern, z.B. Mond, Planeten und auch Kometen.

In die Rechnung gehen die geographischen Koordinaten Breite φ (nach Norden positiv gezählt) und Länge λ (neue Empfehlung der IAU: nach Osten positiv gezählt) ein. Die Länge ist in Stunden anzugeben.

Zur Vermeidung von Umrechnungsfehlern wird einheitlich in Weltzeit UT gerechnet. Der Tag des betreffenden Datums beginnt mit 0^h UT und endet mit 24^h UT. Die Ergebnisse können in Zonenzeiten oder Ortszeiten umgerechnet werden; dabei kann sich das Datum ändern. Einen Datumswechsel erkennt man in der Rechnung wie folgt:
Wird bei der Umrechnung die Zeit negativ, beziehen sich die Angaben auf den vorhergehenden Tag, es sind 24 Stunden zu addieren.
Bei Zeiten über 24 Stunden gelten die Angaben für den folgenden Tag, es sind 24 Stunden zu subtrahieren.

Außer der Position des Gestirns (Rektaszension α und Deklination δ zum Äquinoktium des Datums oder zum Beginn des nächstliegenden Jahresanfanges ist die Kenntnis der Sternzeit ϑ_0 um 0 Uhr UT des betreffenden Tages auf 0 Grad geographischer Länge erforderlich.

1.1. Berechnung für Gestirne mit konstanter Position

1.1.1. Meridiandurchgang

$$D = 0{,}99726957\,(\alpha - \vartheta_0 - \lambda)\ ^{1)} \tag{1}$$

1.1.2. Auf- und Untergang

Diese Zeiten beziehen sich auf den mathematischen Horizont. Die Refraktion geht in die Rechnung mit einem konstanten Wert von 0,58° ein. Bei Sonne und Mond werden die Angaben auf den oberen Rand der Sonnen- bzw. Mondscheibe bezogen. Zusätzlich ist beim Mond noch die Parallaxe zu berücksichtigen.

1) siehe Seite 3

Der halbe Tagbogen wird mit folgenden Zenitdistanzen gerechnet:

Sterne ohne Refraktion	$z = 90{,}00^\circ$
Sterne mit Refraktion	$z = 90{,}58^\circ$
Sonne	$z = 90{,}58^\circ + 0{,}27^\circ = 90{,}85^\circ$
Mond	$z = 90{,}58^\circ + \varrho - \pi$

ϱ ist der scheinbare Halbmesser und π die Horizontalparallaxe.

Halber Tagbogen (in Sternzeit-Stunden):

$$t_o = \frac{1}{15} \text{ arc cos } \left(\frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} \right) \tag{2}$$

Diese Formel ist nicht lösbar, wenn das Gestirn nie auf- oder untergeht.

Aufgang:

$$A = 0{,}99726957\ (\alpha - \vartheta_o - \lambda - t_o)\ ^{1)} \tag{3}$$

Untergang:

$$U = 0{,}99726957\ (\alpha - \vartheta_o - \lambda + t_o)\ ^{1)} \tag{4}$$

Die Auf- und Untergangszeiten beziehen sich jeweils auf das Datum, für welches die Sternzeit ϑ_o gerechnet wurde.

Das Azimut des Auf- und Untergangspunktes, auch Morgen- bzw. Abendweite genannt: 2)

$$a = \text{arc cos } \left(- \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \right) \qquad \text{für } z = 90^\circ \tag{5}$$

$$a = \text{arc cos} \left(\frac{\sin\varphi \cos z - \sin\delta}{\cos\varphi \sin z} \right) \qquad \text{für } z \neq 90^\circ \tag{6}$$

Das Azimut für den Aufgang beträgt $360^\circ - a$, wenn a von Süd über West gezählt wird.

1.2. <u>Berechnung für Gestirne mit veränderlicher Position</u>

Es wird die Differenz des Stundenwinkels t von 0^h UT (mit der Position zu dieser Zeit) bis zum Ereignis ermittelt:

Meridiandurchgang	$t = (\alpha_o - \vartheta_o - \lambda)/24\ ^{1)}$	(7)
Aufgang	$t = (\alpha_o - \vartheta_o - \lambda - t_o)/24\ ^{1)}$	(8)
Untergang	$t = (\alpha_o - \vartheta_o - \lambda + t_o)/24\ ^{1)}$	(9)

Danach wird iterativ der wahre Stundenwinkel gerechnet, d.h., die Positionsänderung in Rektaszension bis zum Ereignis addiert. Falls für die Bewegung in Rektaszension die lineare Interpolation nicht ausreicht, ist die Bildung eines Differenzenschemas für die weitere Rechnung erforderlich:

---

2) exakt definiert ist Morgen- bzw. Abendweite der Winkelabstand vom Ost- bzw. Westpunkt

$$
\begin{array}{llllll}
d_{-1} & \alpha_{-1} & & & & \\
 & & \Delta_{11} & & & \\
d_0 & \alpha_0 & & \Delta_{21} & & \\
 & & \Delta_{12} & & \Delta_3 & \\
d_1 & \alpha_1 & & \Delta_{22} & & \\
 & & \Delta_{13} & & & \\
d_2 & \alpha_2 & & & &
\end{array}
$$

Bei der folgenden Formel können gegebenenfalls die Glieder der höheren Interpolation entfallen:

$$
t_{n+1} = t + \frac{\Delta_{12}}{24}\, t_n + \frac{\Delta_{21} + \Delta_{22}}{48} \cdot \frac{t_n(t_n - 1)}{2} + \frac{\Delta_3}{24} \cdot \frac{t_n(t_n - 1)(t_n - 0{,}5)}{6} \qquad (10)
$$

Begonnen wird mit $t_n = t$, nach zwei oder drei Rechnungen ist meistens die gewünschte Genauigkeit erreicht.

1.2.1. <u>Meridiandurchgang</u>

$$
D = 24 \cdot 0{,}99726957\, t_{n+1} \qquad (11)
$$

1.2.2. <u>Auf- und Untergang</u>

Für diese Rechnung wird zunächst eine wahrscheinliche Deklination angenommen, günstig ist die Deklination für 12 Uhr UT. Dann wird die Deklination für den erhaltenen Zeitpunkt des Auf- oder Unterganges interpoliert und ab halben Tagbogen (2) erneut gerechnet.

Auf- und Untergang:

$$
A \text{ bzw. } U = 24 \cdot 0{,}99726957\, t_{n+1} \qquad (12)
$$

1.3. <u>Beginn und Ende der Dämmerung</u>

Gerechnet wird mit den Sonnenkoordinaten. Für den Dämmerungsbeginn ähnelt die Rechnung dem Sonnenaufgang und für das Dämmerungsende dem Sonnenuntergang.

In Formel (2) werden folgende Zenitdistanzen eingesetzt:

Bürgerliche Dämmerung	$z = 96^\circ$
Nautische Dämmerung	$z = 102^\circ$
Astronomische Dämmerung	$z = 108^\circ$

Für viele Ansprüche genügt hierzu eine genäherte Rechnung.

---

1) Vor Multiplikation bzw. Division ist der Wert in der Klammer auf das Intervall 0 ... 24 Stunden zu reduzieren.

Nur einmal +24 oder -24 Stunden rechnen, ist der Klammerwert danach noch nicht im Intervall 0 ... 24 Stunden, fällt die Erscheinung nicht in den entsprechenden Tag und die Rechnung bleibt ohne Ergebnis.

Beispiel: Wann geht am 1. Januar 1979 auf 15° östlicher Länge die Sonne durch den Meridian?

Die Rektaszension der Sonne aus einem Jahrbuch:

1979 Jan. 1	$18^h43^m22^s = 18{,}^h72278$		
			$0{,}^h07361$
Jan. 2	$18\ 47\ 47 = 18{,}79639$		

Sternzeit auf 0 Grad Länge um 0 Uhr Weltzeit: $6^h40^m12^s = 6{,}^h67000$

Formel (7): $t = (18{,}72278 - 6{,}67000 - 1{,}0)/24 = 0{,}4605325$

Formel (10) gekürzt auf lineare Interpolation:

$$t_{n+1} = 0{,}4605325 + 0{,}07361 \cdot 0{,}4605325/24 = 0{,}461945$$
$$t_{n+1} = 0{,}4605325 + 0{,}07361 \cdot 0{,}461945/24 = 0{,}461949$$
$$t_{n+1} = 0{,}4605325 + 0{,}07361 \cdot 0{,}461949/24 = 0{,}461949$$

Formel (11) ergibt:

$$D = 24 \cdot 0{,}99726957 \cdot 0{,}461949 = 11{,}^h056504 = \underline{\underline{11^h03^m23^s\ UT}}$$

Beispiel: Auf- und Untergang sowie Meridiandurchgang des Mondes am 5. Januar 1979 auf 15 Grad östlicher Länge und 50 Grad nördlicher Breite

Rektaszension und Deklination aus einem Jahrbuch:

1979 Jan. 4	$23^h40{,}0^m = 23{,}^h6667$				
		$0{,}^h8750$			
5	$0\ 32{,}5 = 0{,}5417$		$-0{,}^h0184$	$1°47' = 1{,}°78$	
		$0{,}8566$			$4{,}°17$
6	$1\ 23{,}9 = 1{,}3983$		$-0{,}0116$	$5\ 57 = 5{,}95$	
		$0{,}8450$			
7	$2\ 14{,}6 = 2{,}2433$				

$\vartheta_0 = 6^h55^m59^2 = 6{,}^h93306$

$\varrho = 0{,}°267$

$\pi = 0{,}°967$

Formel (7) ergibt $t = 0{,}692027$ und mit Formel (10) erhält man

$$t_{n+1} = 0{,}7167932$$
$$= 0{,}717674$$
$$= 0{,}717705$$
$$= 0{,}717706$$

Formel (11):

$$D = 24 \cdot 0{,}99726957 \cdot 0{,}717706 = 17{,}17792 = \underline{\underline{17^h10{,}7^m\ UT}}$$

Für den Aufgang wird in (2) $z = 89{,}°88$ eingesetzt: $t_0 = 6{,}^h2958$

Nach Rechnung mit (8) und (10) ist $t_{n+1} = 0{,}44568$ und die erste Näherung von A ist:

$A = 10{,}^h6672 = 10^h40^m$ UT, zu dieser Zeit beträgt die Deklination $3{,}°63$ und der verbesserte Stundenwinkel nach (2):

$t_0 = 6{,}^h2766$

Eine erneute Rechnung führt zur genauen Aufgangszeit 10^h41^m UT.

Die Untergangszeit rechnet sich ähnlich. Als erste Näherung erhält man

$U = 23^h{,}6874 = 23^h41^m$ UT.

Die verbesserte Deklination von $5^\circ{,}90$ führt dann zu

$U = 23^h{,}8562 = \underline{\underline{23^h51^m \text{ UT}}}$.

In MEZ umgerechnet findet der Monduntergang am 6. Januar um 0^h51^m statt. Am 5. Januar geht nach MEZ der Mond nicht unter.

<u>Anmerkung:</u> Die Beispiele wurden so gewählt, daß eine Nachrechnung mit Angaben aus dem "Kalender für Sternfreunde" ohne weitere Umrechnungen möglich ist.

---

2. Topozentrische Koordinaten von Mond, Sonne und Planeten

Die Jahrbücher geben geozentrische Koordinaten von Mond, Sonne und Planeten. Für die Berechnung einiger Erscheinungen, z.B. Sonnenfinsternisse und Bedeckungen durch den Mond, werden jedoch topozentrische auf den Beobachtungsort bezogene, Koordinaten benötigt. Sie unterscheiden sich von den geozentrischen durch die Berücksichtigung der täglichen Parallaxe.

Für genaue Rechnungen (wir verstehen hier auf die Bogensekunde genau) sind zu beachten:

- die von der Kugel abweichende Gestalt der Erde
- Höhe des Beobachtungsortes über Normalnull
- Einflüsse der Präzession, Nutation und Aberration (mittlere oder scheinbare Koordinaten)
- Einfluß der Nutation auf die Sternzeit (mittlere oder scheinbare Sternzeit)

In der folgenden Rechnung werden diese Einflüsse berücksichtigt.

Die Rechnung ist entweder mit

- scheinbaren Koordinaten und mit
- scheinbarer Sternzeit

oder mit

- mittleren Koordinaten zum Äquinoktium des Datums und mit
- mittlerer Sternzeit

durchzuführen.

Bei genäherter Rechnung (auf die Bogenminute genau entsprechend des Kalenders für Sternfreunde) genügen mittlere Örter bezogen auf das Äquinoktium des Datums. Die tägliche Parallaxe von Sonne und Planeten sowie Nutation und Aberration können hier vernachläßigt werden. Lediglich die tägliche Parallaxe des Mondes geht stets in die Rechnung ein.

2.1. Geozentrische Koordinaten des Beobachtungsortes

Geozentrische Breite:

$$\varphi' = \arctan\,(0{,}99330546 \tan\varphi)$$

Geozentrischer Abstand:

$$\varrho = \frac{6356774{,}7}{\sqrt{1 - 0{,}00669454 \cos^2\varphi'}}\ \text{m}$$

$$q = (\varrho + \text{ Höhe über Normalnull })/6378160\ \text{m}$$

2.2. Topozentrische Koordinaten von Sonne und Planeten

$$\alpha_{top} = \alpha_{geo} - \frac{8{,}''794}{\Delta} \; \frac{\cos\varphi' \sin(\vartheta - \alpha)}{\cos\delta}$$

$$\delta_{top} = \delta_{geo} - \frac{8{,}''794}{\Delta} \; (\cos\delta \sin\varphi' - \sin\delta\cos\varphi'\cos(\vartheta - \alpha))$$

Δ... Abstand von der Erde in astronomischer Entfernungseinheit A.

2.3. Topozentrische Koordinaten des Mondes

Die Vektoren

Erdmittelpunkt - Mondmittelpunkt und
Erdmittelpunkt - Beobachtungsort

werden subtrahiert und der erhaltene Vektor

Beobachtungsort - Mondmittelpunkt

entspricht den topozentrischen Koordinaten.

Diese Rechnung ist exakt, weil alle Einflüsse der täglichen Parallaxe berücksichtigt sind.

Die folgenden Formeln ergeben zunächst die rechtwinkligen topozentrischen Koordinaten:

$$x = \frac{\cos\delta \cos\alpha}{\sin\pi} - q \cos\varphi' \cos\vartheta \qquad (1)$$

$$y = \frac{\cos\delta \sin\alpha}{\sin\pi} - q \cos\varphi' \sin\vartheta \qquad (2)$$

$$z = \frac{\sin\delta}{\sin\pi} - q \sin\varphi' \qquad (3)$$

Daraus erhält man die gesuchten Koordinaten:

$$\alpha_{top} = \text{arc tan } (y/x) \qquad (4)$$

$$\delta_{top} = \text{arc tan } \left(z / \sqrt{x^2 + y^2} \right) \qquad (5)$$

$$\pi_{top} = \text{arc sin } \left(1 / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \qquad (6)$$

$$\varrho_{top} = 0{,}27247 \; \pi_{top} \qquad (7)$$

(π_{top} ist die topozentrische Parallaxe und ϱ_{top} der topozentrische Mondhalbmesser)

Beispiel: Am 3. Oktober 1986 um $18^h 56{,}9^m$ UT beginnt eine totale Sonnenfinsternis an dem Ort mit den folgenden geographischen Koordinaten: Länge = - $32^\circ 16'$ (westliche Länge) und Breite = $65^\circ 00'$.
Zur Bestätigung werden die topozentrischen Koordinaten von Sonne und Mond gerechnet.

geozentrische Koordinaten: Sonne: $\alpha = 189{,}4356126^\circ$
$\delta = -\,4{,}066273009^\circ$
Mond: $\alpha = 189{,}8345666^\circ$
$\delta = -\,3{,}181225995^\circ$

Sternzeit: $\vartheta = 264,1407657^\circ$

geozentrische Koordinaten: $\varphi' = 64,85227^\circ$

$q = 0,99725$

Die Rechnung ergibt für die Sonne folgende topozentrische Koordinaten:

$\alpha_{top} = 189,4346098^\circ$

$\delta_{top} = -4,06853412^\circ$

Zur gegebenen Zeit beträgt die Parallaxe des Mondes $\pi = 58'35,4''$ und der geozentrische Halbmesser $\varrho = 15'57,9''$.

Die rechtwinkligen Koordinaten sind

$x = -57,68285524$; $y = -9,585329787$ und $z = -4,158993736$.

Daraus erhält man:

$\alpha_{top} = 189,4347962^\circ$

$\delta_{top} = -4,068351933^\circ$

$\pi_{top} = 0,9774314508^\circ$ und damit ist $\varrho_{top} = 0,2663207474^\circ$.

In diesem Beispiel sind die angezeigten Stellen des Rechners wiedergegeben, die letzten Ziffern sind meistens ohne Bedeutung.

Vergleicht man die topozentrischen Koordinaten, so bleibt nur eine Differenz von weniger als einer Bogensekunde und die Bedingung für den Beginn der Sonnenfinsternis ist erfüllt. Als Sonnenhalbmesser wird angegeben: $\varrho = 15'59,2''$, er ändert sich während der Finsternis praktisch nicht.

Dieses Beispiel ist keine Anleitung zum Berechnen von Sonnenfinsternissen.

---

3. Genaue Berechnung der Präzession

(für einige Jahrzehnte, außer polnahe Örter)

Mit den folgenden Formeln können Koordinaten umgerechnet werden von einer beliebigen Ausgangsepoche J_A in eine beliebige Zielepoche J_Z.

Die Epochen können in Jahre oder günstiger in Julianische Tage ausgedrückt werden und man erhält T als Bruchteil des Jahrhunderts:

$$T = \left(\frac{J_Z - J_A}{2} + J_A - 2000,0\right) / 100 \qquad (J_Z \text{ und } J_A \text{ in Jahre})$$

$$T = \left(\frac{J_Z - J_A}{2} + J_A - 2451545,0\right) / 36525 \quad (J_Z \text{ und } J_A \text{ in JD})$$

Mit der Zeitdifferenz t und den Präzessionskonstanten m und n errechnen sich die Koordinaten zur Zielepoche:

$$t = \frac{J_Z - J_A}{100} \qquad (J_Z \text{ und } J_A \text{ in Jahre})$$

$$t = \frac{J_Z - J_A}{36525} \qquad (J_Z \text{ und } J_A \text{ in JD})$$

$m = 1{,}^{\circ}280917 + 0{,}^{\circ}000775\ T$

$n = 0{,}^{\circ}556620 - 0{,}^{\circ}000236\ T$

$$\alpha_Z = \alpha_A + (m + n \sin\alpha_A \tan\delta_A)\ t$$

$$\delta_Z = \delta_A + (n \cos\alpha_A)\ t$$

Bei Sternen ist vor der Rechnung die Eigenbewegung zu berücksichtigen.

Beispiel: Von α UMa sind die Koordinaten für die Epoche 1980,0 bekannt, gesucht sind sie für die Epoche 1900,0.

Die Position für 1980,0:

$\alpha = 6^h44^m16{,}0^s$ und $\delta = -16^{\circ}41'46''$.

Die jährliche Eigenbewegung beträgt $\mu_\alpha = -0{,}374''$ und $\mu_\delta = -1{,}21''$.
Die korrigierte Position ist damit:

$\alpha_A = 101{,}07498^{\circ}$ und $\delta_A = -16{,}660889^{\circ}$.

Mit $T = -0{,}6$ erhält man

$m = 1{,}^{\circ}280452$ und $n = 0{,}^{\circ}5567616$.

Die Zielkoordinaten sind:

$\alpha_Z = 6^h40^m43{,}5^s$ und $\delta_Z = -16^{\circ}34'31''$.

---

4. Scheinbare Sternzeit

Sie unterscheidet sich von der mittleren Sternzeit um den Betrag der Nutation in Rektaszension, auch "Gleichung der Äquinoktien" genannt. Mit ausreichender Genauigkeit für Amateure genügt eine genäherte Rechnung, in dem die Störung durch den Mondknoten berücksichtigt wird:

$$\vartheta_s = \vartheta_m - 1{,}^s06 \sin\Omega$$

(ϑ_s ist die scheinbare und ϑ_m die mittlere Sternzeit, Ω der aufsteigende Knoten des Mondes)

Arbeitskreis "Numerische Astronomie"
im Astronomischen Zentrum Schkeuditz
PSF 29
Schkeuditz
7144

Leiter: Dipl.-Phys. Lothar Ehrenberg

Autor:
Karl-Heinz Bücke
Florian-Geyer-Str. 40/004
Dresden
8019

III-18-155 L 582/87