MATHEMATIK für die ASTRONOMIE

KULTURBUND DER DDR

Zentrale Kommission Astronomie und Raumfahrt – Arbeitskreis „Numerische Astronomie"

Veröffentlichung 9 Leipzig 1989

Bestimmung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis nach Friedrich Wilhelm Bessel

Mit dieser Veröffentlichung beginnt eine dreiteilige Folge über die Berechnung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis. Die Arbeit basiert auf einem historischen Werk von Bessel und beachtet sowohl theoretische als auch praktische Aspekte.
Auf der Grundlage möglichst exakter Werte für die scheinbaren Positionen von Sonne und Mond werden die theoretischen Grundlagen erörtert und in Form vom Algorithmen aufbereitet. Im dritten Teil der Veröffentlichungen werden alle Algorithmen an einem konkreten Beispiel für eine Sonnenfinsternis diskutiert und die numerischen Ergebnisse nachvollziehbar aufbereitet.
In einer weiteren Veröffentlichung ist vorgesehen, die Behandlung des lokalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis zu diskutieren.

Die Methode von Bessel zur Theorie der Finsternisse bildet die Grundlage aller modernen Finsternistheorien und ist ohne weitere Schwierigkeiten auch auf Sternbedeckungen durch den Mond oder durch Planeten anwendbar.

Autor: Lothar Ehrenberg
Karl-Marx-Straße 47
Böhlitz-Ehrenberg
7152

Leiter des Arbeitskreises
" Numerische Astronomie "
PSF 29
Schkeuditz
7144

Inhaltsverzeichnis

Der globale Verlauf einer Sonnenfinsternis Seite 1

Die Besselsche Fundamentalebene und die Ränderberührung Seite 8

Die Ränderberührung und der zugehörige Erdort Seite 16

Mathematische Grundlagen zur Berechnung der Horizontkurve Seite 21

Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der Horizontkurve Seite 34

Mathematische Grundlagen zur Berechnung der Grenzkurve Seite 40

Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der Grenzkurve Seite 47

Mathematische Grundlagen zur Berechnung der Zentrallinie und des Bereiches der Totalitätszone einer Finsternis Seite 50

Lösungsalgorithmus zur Bestimmung der Zentrallinie und des Bereiches der Totalitätszone Seite 62

Diskussion eines Beispiels:
Die totale Sonnenfinsternis vom 16.02.1980 Seite 66

Quellennachweis

Die vorliegende Untersuchung wurde auf der Grundlage der Arbeit: Friedrich Wilhelm Bessel "Analyse der Finsternisse" - erschienen in "Astronomische Untersuchungen", (Zweiter Band), Königsberg 1842 - durchgeführt.

Bestimmung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis nach Friedrich Wilhelm Bessel

Der globale Verlauf einer Sonnenfinsternis

Die Bedingungen für das Eintreten einer Sonnenfinsternis aus der Sicht des Beobachters auf der Erde sind das Übereinstimmen der scheinbaren Positionen von Sonne und Mond mit dem Spielraum, daß die Scheiben von Sonne und Mond sich mindestens von außen berühren müsseh.
Da die scheinbare Position des Mondes stark vom Beobachtungsort abhängig ist, wird das prinzipielle Eintreten und das Ausmaß der Verfinsterung für jeden Ort auf der Erde anders sein.
Das Größenverhältnis des Mondes zur Sonne und ihre Abstände untereinander und zur Erde haben zur Folge, daß eine Sonnenfinsternis nur von einem Teil der der Sonne zugewandten Erdoberfläche aus gesehen werden kann.
Es gibt deshalb grundsätzlich zwei Aufgaben bei der Berechnung einer Sonnenfinsternis:

a) das Gebiet auf der Erdoberfläche zu bestimmen, für das die Finsternis als Erscheinung beobachtet werden kann.
b) den Verlauf einer möglichen Finsternis für einen fest vorgegebenen Erdort zu berechnen.

Der Ablauf einer Finsternis wird durch die Projektion des Mondes aus der Sicht der Sonne, den Mondschatten, auf die Erdoberfläche bestimmt.
Die Grenzen der Sichtbarkeit werden durch eine Kurve auf der Erdoberfläche gegeben, die entsteht, wenn die gemeinsame einhüllende Fläche von Sonne und Mond die Erdoberfläche schneidet und wir die Grenzen des überstrichenen Gebietes im zeitlichen Ablauf der Finsternis betrachten.
Eine zulässige Vereinfachung ist die Annahme der Kugelgestalt für Sonne und Mond.

Die Einhüllenden von Sonne und Mond sind in diesem Falle Kegeloberflächen:

- einen Kegel mit der Spitze außerhalb der Verbindung beider Himmelskörper, der Erde zugewandt;
- zwei Kegel mit gemeinsamer Achse und gemeinsamer Spitze auf der Verbindungslinie beider Körper.

Der erste Kegel begrenzt bei seinem Schnitt mit der Erdoberfläche das Gebiet der Totalität, während von den zwei Kegeln der erdzugewandte bei seinem Schnitt das Gebiet der partiellen Verfinsterung einschließt.
Erreicht die Spitze des Kernschattenkegels nicht die Erdoberfläche, bleibt die Finsternis partiell. Ringförmige Verfinsterung tritt dabei in dem Gebiet auf, das durch den Schnitt des über die Spitze hinaus verlängerten Kegels mit der Erdoberfläche entsteht.

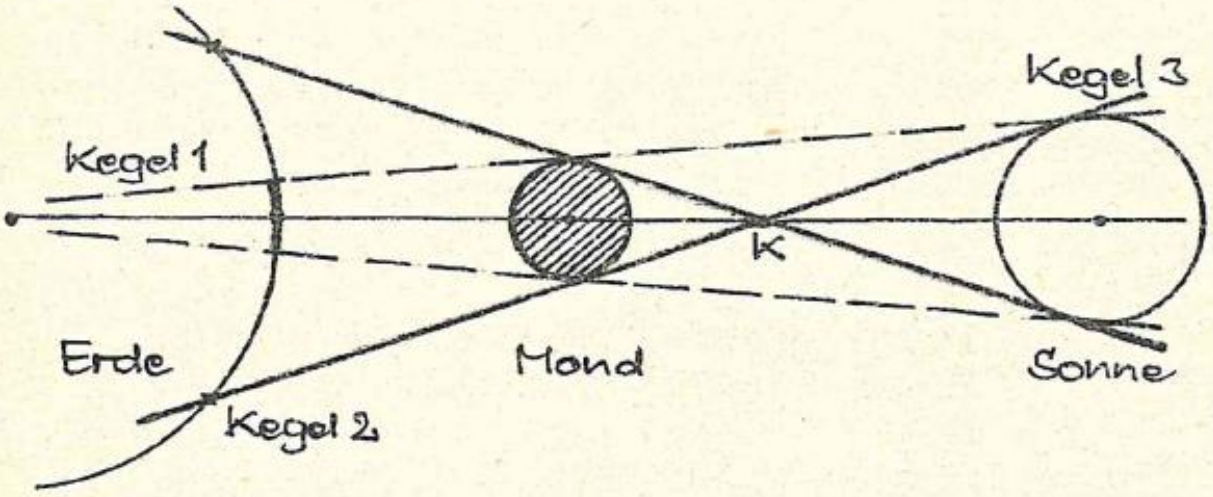
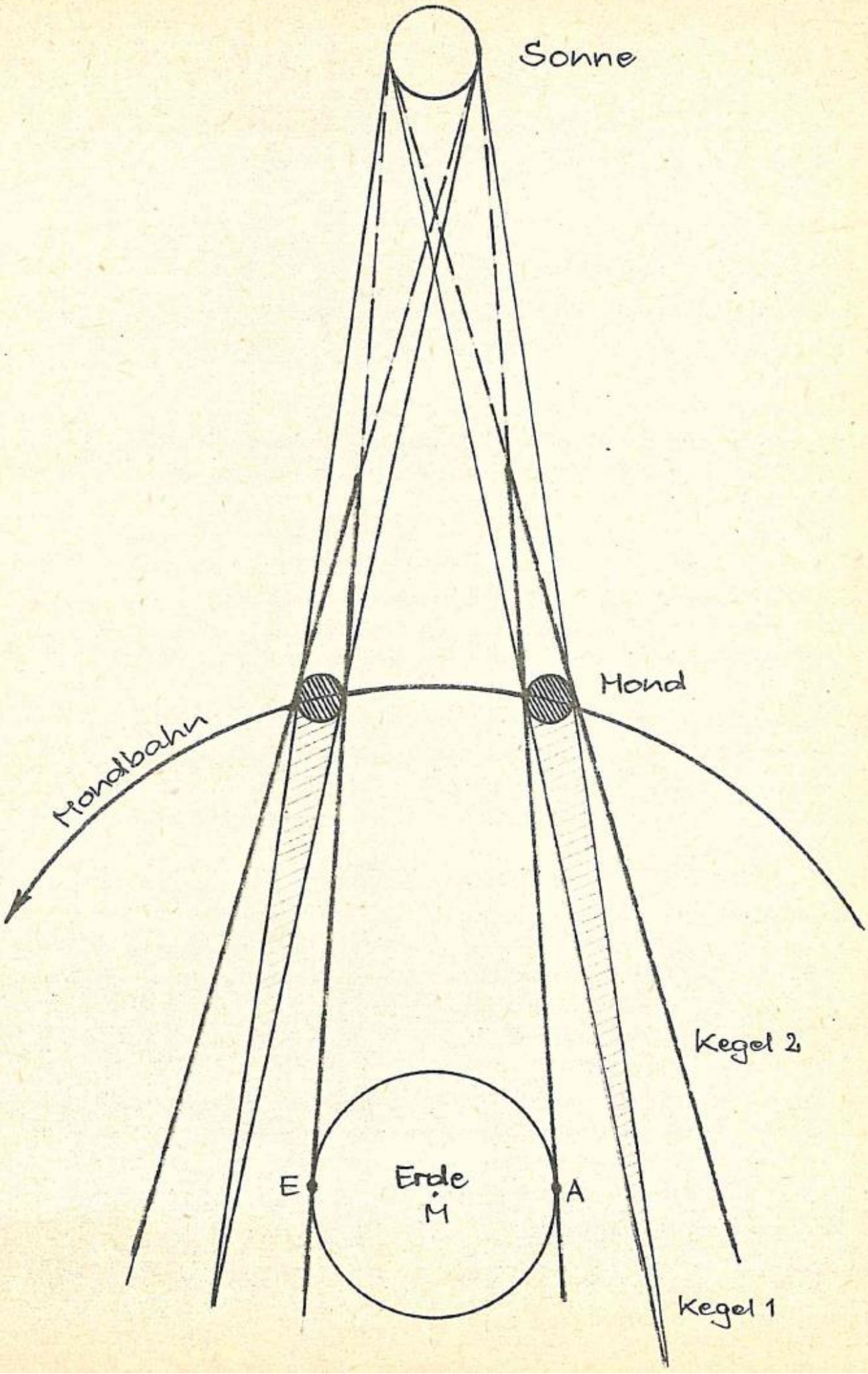


Abbildung 1 : die Lage der Schattenkegel

Die Schnittlinie der Verbindungsgeraden von Mond- und Sonnenmittelpunkt mit der Erdoberfläche ist die Zentrallinie der Finsternis.

Siehe folgende Seite

Abbildung 2 : erster und letzter Kontakt


Sonne
Mond
Mondbahn
Kegel 2
E
Erde
M
A
Kegel 1

Zur einheitlichen Beschreibung des zeitlichen Ablaufes einer Finsternis hat F.W. Bessel eine Bezugsebene eingeführt, auf die alle Ereignisse bezogen werden können.
Die Besselsche Ebene steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte von Sonne und Mond und enthält den Erdmittelpunkt.
Die Schnittkurven der einhüllenden Kegel mit dieser Ebene sind immer Kreise, da die Kegelachse mit der Verbindungsgeraden zusammenfällt.
Zu verschiedenen Zeitpunkten ist die Lage der Ebene im Raum unterschiedlich. Alle Ebenen zu verschiedenen Zeitpunkten enthalten den Erdmittelpunkt als gemeinsamen Punkt.
Fixieren wir den Erdmittelpunkt in der Ebene, dann wird der zeitliche Ablauf der Finsternis durch die Bewegung des Durchstoßpunktes der Kegelachse beschrieben.
Nehmen wir den Erdradius als Bezugsgröße, dann gibt der Schnitt der Erdkugel mit der Ebene einen Kreis vom Radius $r = 1$, den Erdkreis.
Die zeitliche Abfolge der Schnittkreise der Kegel und deren Schnittpunkte und Überdeckungen mit dem Erdkreis charakterisieren die Finsternis.
Danach können wir prinzipiell zwei verschiedene Abläufe unterscheiden:

1. der Schattenkreis tritt vollständig in den Erdkreis ein und
   - die Finsternis hat eine nördliche und eine südliche Grenzkurve für die Sichtbarkeit
   - es gibt immer eine Zentrallinie.
2. der Schattenkreis tritt nur teilweise in den Erdkreis ein und
   - die Finsternis hat nur eine nördliche oder südliche Grenzkurve für die Sichtbarkeit
   - tritt der Mittelpunkt des Schattenkreises nicht in den Erdkreis ein, gibt es keine Zentrallinie.

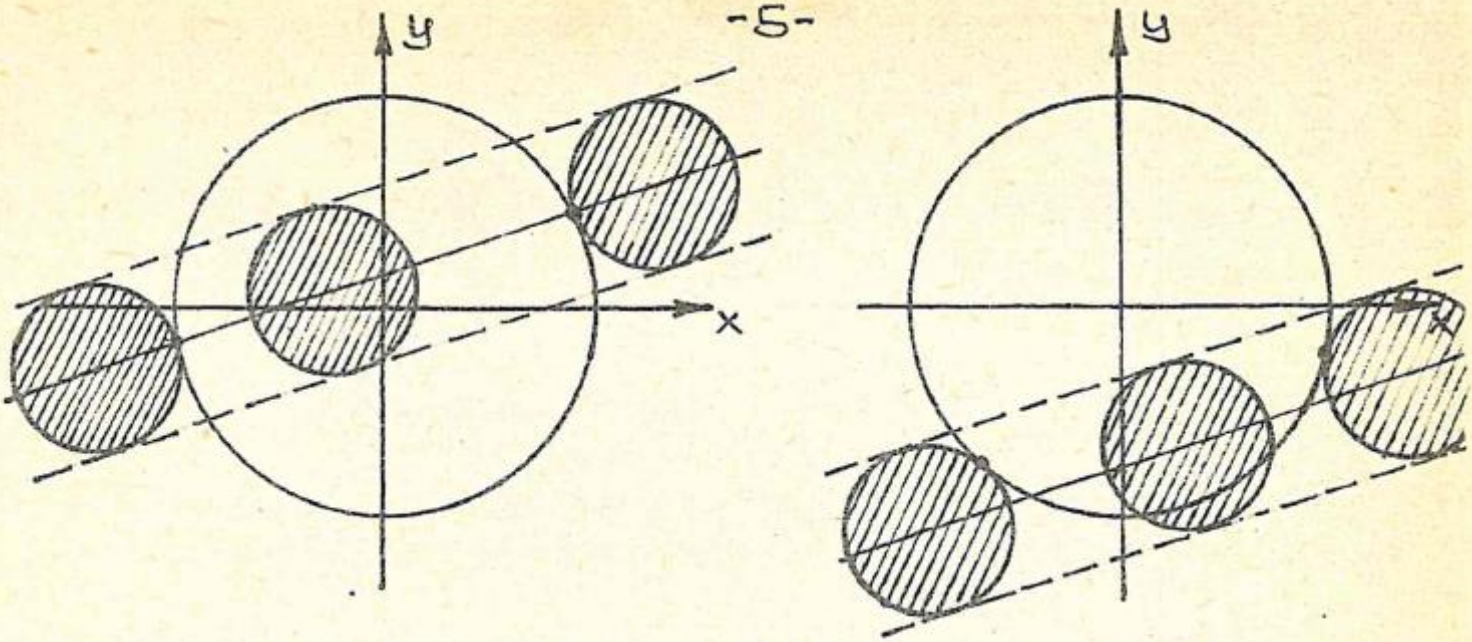


Abbildung 2 : die beiden Typen einer Finsternis

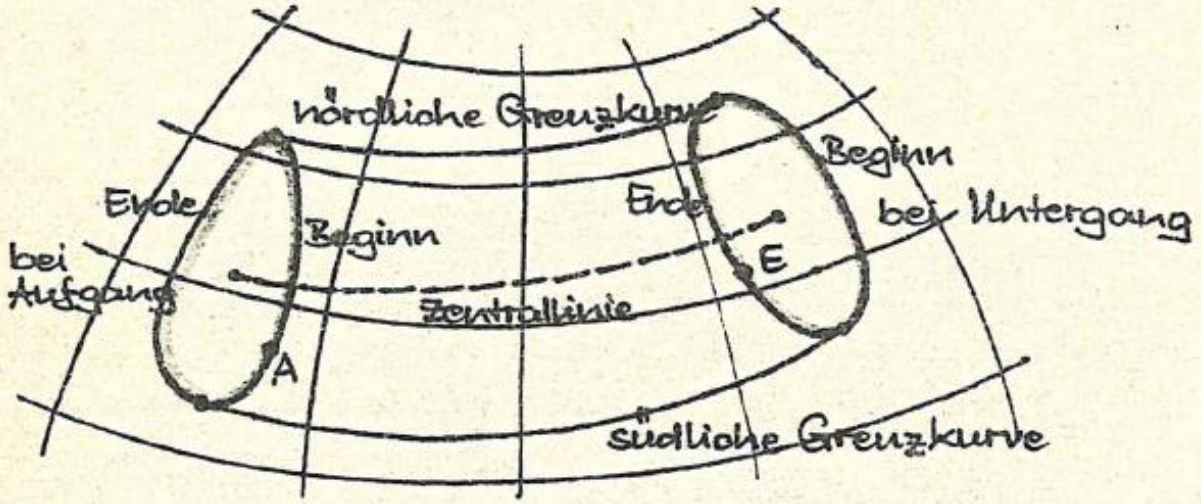
In der Darstellung mit der Besselschen Bezugsebene (xy-Ebene) sind auch besondere Ereignisse im Finsternisablauf abzulesen:

- der erste äußere Kontakt des Schattenkreises mit dem Erdkreis markiert den Beginn der Finsternis (für den Berührungspunkt als Erdort beginnt die äußere Berührung der beiden Himmelskörper bei Aufgang des Berührungspunktes am Horizont
- unmittelbar nach dem ersten Kontakt gibt es zwei Schnittpunkte des Schattenkreises mit dem Erdkreis (für die zugehörigen Erdörter beginnt die Finsternis ebenfalls mit dem Aufgang des Berührungspunktes am Horizont)
- beim weiteren Durchlaufen des Schattenkreises gibt es für den Fall des vollständigen Eintritts einen nördlichsten und einen südlichsten Schnittpunkt mit dem Erdkreis (für die zugehörigen Erdörter ist der Aufgang des Berührungspunktes am Horizont das Maximum der Finsternis)
- für die den weiteren Schnittpunkten zugehörigen Erdörter ist der Aufgang des Berührungspunktes am Horizont das Ende der Finsternis)
- löst sich der Schattenkreis innen vom Erdkreis ab, dann sind die Erscheinungen der Finsternis nicht mehr mit dem Aufgang verbunden. Es markiert sich eine obere und eine untere Grenzkurve, deren zuge-

ordnete Erdörter die äußere Ränderberührung der Körper als Maximum der Finsternis sehen.

- berührt der Schattenkreis den Erdkreis auf der anderen Seite von innen, dann ist für den zugehörigen Erdort der Beginn der Finsternis gleichzeitig mit dem Untergang des äußeren Berührungspunktes.
- von da an gibt es wieder zwei Punkte, für die Beginn der Finsternis und Untergang des Berührungspunktes zusammenfallen.
- für einen nördlichsten und einen südlichsten Punkt ist der Untergang des Berührungspunktes das Maximum der Finsternis.
- zu den weiteren Schnittpunkten gehören Erdörter, für die die Finsternis mit dem Untergang des Berührungspunktes endet.
- der letzte äußere Kontakt von Schattenkreis und Erdkreis markiert den Erdort, für den als letzten die Finsternis bei Untergang des Berührungspunktes endet.

Obertragen wir die Kurven für Aufgang und Untergang der äußeren Berührungspunkte der beiden Himmelskörper auf die Erdoberfläche, dann werden die Kurven wegen der Eigendrehung der Erde und der Relativbewegung des Schattens auseinandergezogen und Beginn und Ende vertauscht.



A - erster Kontakt (Beginn der Finsternis)
E - letzter Kontakt (Ende der Finsternis)

Abbildung 4 : Finsternisverlauf auf der Erde

Tritt der Schattenkreis nicht vollständig in den Erdkreis ein, dann entfällt eine der beiden Grenzkurven und die geschlossenen Kurven für Aufgang und Untergang werden zu einer Kurve, in derem Durchlauf die Aufgangs- in die Untergangsbereiche übergehen.

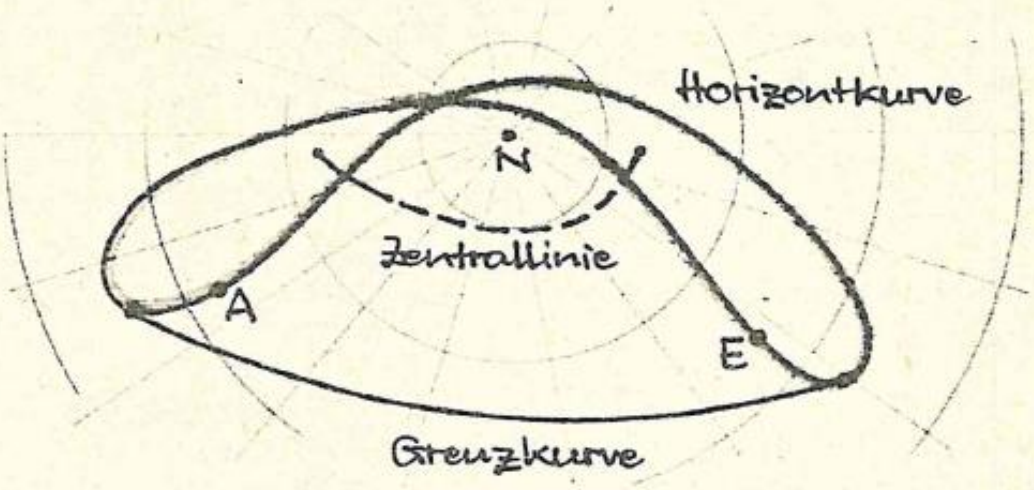


Abbildung 5 : der Fall einer Horizontkurve

Zur Beurteilung des globalen Finsternisverlaufes sind 3 Kurven auf der Erdoberfläche getrennt zu untersuchen:

- die beiden geschlossenen - oder ein ineinander übergehender - Kurvenzüge für Beginn bzw. Ende der Finsternis bei Aufgang oder Untergang des Berührungspunktes am Horizont - <u>die Horizontkurven</u>
- die nördliche und südliche Grenzkurve mit dem Maximum der Finsternis als äußere Berührung - <u>die Grenzkurven</u>
- den Verlauf der zentralen Verfinsterung - <u>die Zentrallinie</u>.

Wir werden diese drei verschiedenen Kurven in der gleichen Reihenfolge nacheinander untersuchen und Algorithmen zu ihrer punktweisen Berechnung angeben.
Für den Fall der inneren Ränderberührung von Sonne und Mond treten prizipiell die gleichen Kurven (Horizont- und Grenzkurven) auf. Zur Diskussion der Finsternis sind aber nur die Grenzkurven von Bedeutung. Für diese Kurven werden wir ebenfalls ein Berechnungsverfahren angeben.

Die Besselsche Fundamentalebene und Ränderberührungen

Die Besselsche Bezugsebene ist xy-Ebene eines Koordinatensystems im Raum. In diesem Koordinatensystem ist die z-Achse parallel zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte M_1 - M_2 von Sonne und Mond. Die z-Achse trifft die Himmelssphäre im Punkt Z mit der Rektaszension a und der Deklination d.
Die y-Achse wird so gelegt, daß sie die Himmelssphäre im Punkt Y mit den Koordinaten a und d + 90° trifft.
Die x-Achse ergänzt die beiden anderen Achsen zu einem Rechtssystem.
Der Ursprung des so orientierten Koordinatensystems XYZ liegt im Mittelpunkt M der Erde.
In diesem Koordinatensystem habe der Beobachter am Erdort B, die gemeinsame Kegelspitze K von Kegel 2 und 3, der Sonnenmittelpunkt M_1 und der Mondmittelpunkt M_2 die Koordinaten:

$$B:\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} \qquad K:\begin{pmatrix}x\\ y\\ s\end{pmatrix} \qquad M_1:\begin{pmatrix}x\\ y\\ z'\end{pmatrix} \qquad M_2:\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Die folgenden Abbildungen sollen die geometrischen Verhältnisse für den Fall der äußeren Ränderberührung aus der Sicht des Beobachters verdeutlichen.

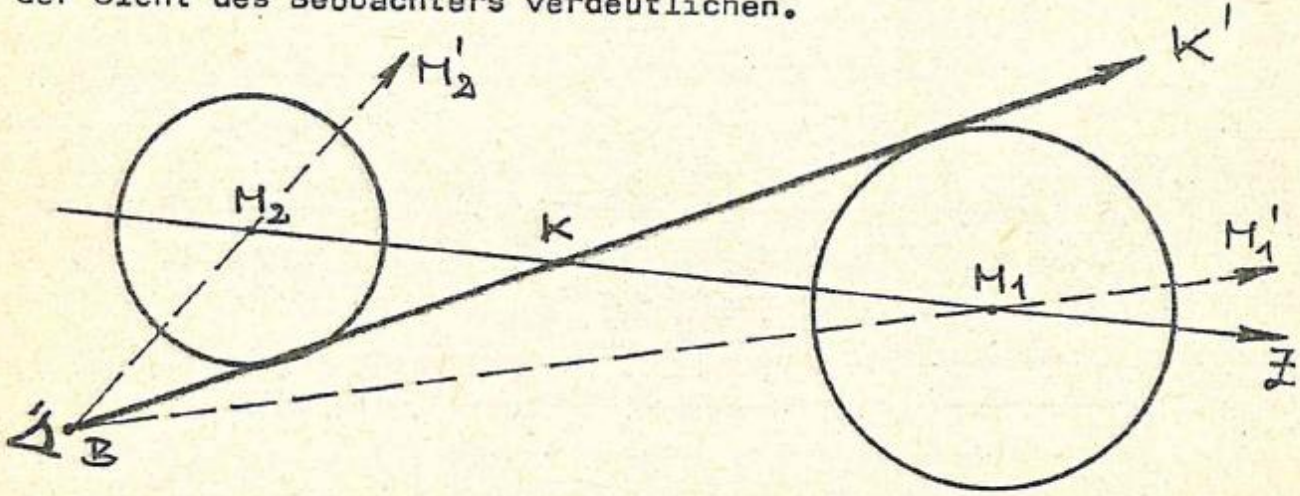
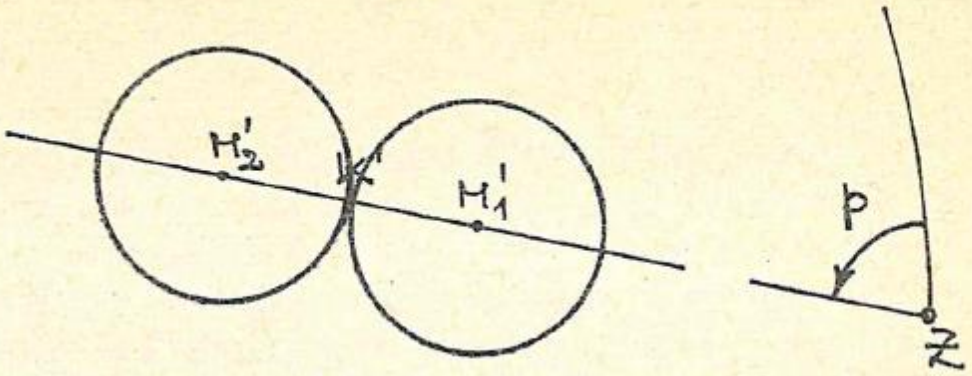


Abbildung 6 : Ränderberührung aus Beobachtersicht



p - Positionswinkel der Ränderberührung
Abbildung 7 : Projektion an die Himmelssphäre

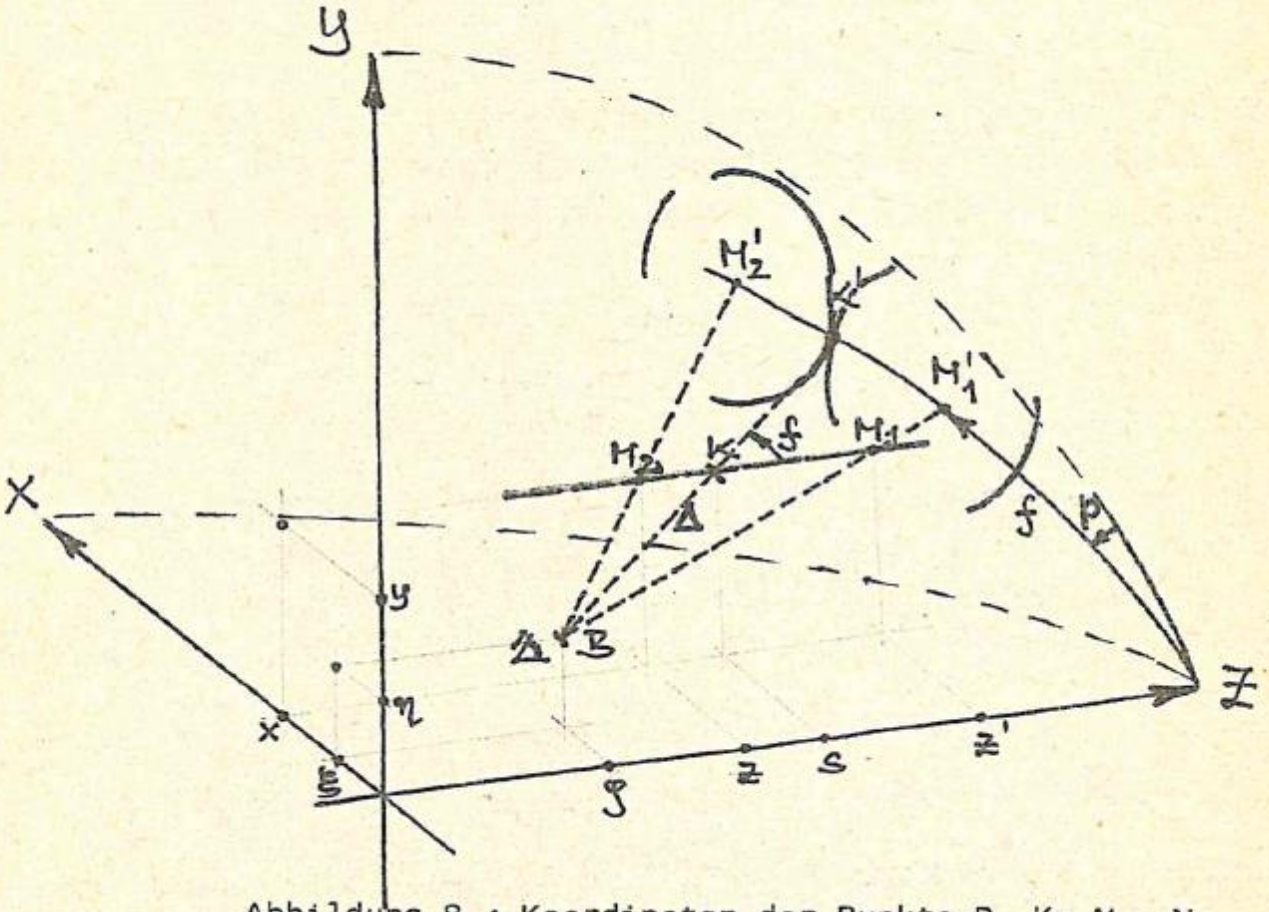


Abbildung 8 : Koordinaten der Punkte B, K, M_1, M_2

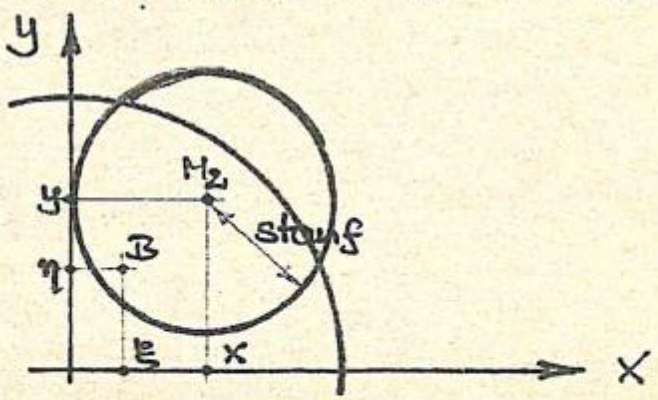


Abbildung 9 : die Besselsche xy-Ebene

MATHEMATIK für die ASTRONOMIE

KULTURBUND DER DDR

Zentrale Kommission Astronomie und Raumfahrt – Arbeitskreis „Numerische Astronomie"

Veröffentlichung 10 Leipzig 1990

Bestimmung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis nach Friedrich Wilhelm Bessel

In dem zweiten Teil der Veröffentlichung werden die theoretischen Grundlagen für die Berechnung des globalen Verlaufes einer Sonnenfinsternis abgeschlossen und Algorithmen zur Ermittlung der einzelnen Grenz- oder Randkurven und für die Zentrallinie angegeben.

Autor: Lothar Ehrenberg
Karl-Marx-Straße 47
Böhlitz-Ehrenberg
7152

Leiter des Arbeitskreises
" Numerische Astronomie "
PSF 29
7144 Schkeuditz

und $$\xi = \frac{\varrho - \varrho_i}{r'\varrho}\sqrt{1-e^2}$$

gewinnen wir die Größen Δw und $\Delta\varphi$ aus

$$\Delta w = \xi\left(\cos m + \sin m \cdot \tan\varphi_0 \cdot \sin(\mu' - a + w_0 + M)\right)$$

$$\Delta\varphi = \xi\,\frac{1-e^2\sin^2\varphi_0}{1-e^2}\cdot \sin m \cdot \cos(\mu' - a + w_0 + M).$$

Die Koordinaten w_0 und φ_0 gehören zu dem entsprechenden Punkt auf der Zentrallinie.
Die beiden Punkte auf den Grenzkurven der Totalitätszone haben die Koordinaten

$$w_{1/2} = w_0 \pm \Delta w$$
$$\varphi_{1/2} = \varphi_0 \pm \Delta\varphi.$$

Das Verfahren ist für alle Punkte anwendbar, die nicht zu nahe an den Randpunkten der Zentrallinie liegen.

Das in den letzten Punkten dargelegte Berechnungsverfahren berücksichtigt natürlich nicht alle möglichen Grenzfälle. Besonders bei Finsternissen, bei denen der Kernschattenkegel nur wenig in die Erdoberfläche eindringt und die Zentrallinie nur sehr kurz wird oder im Extremfall nur aus einem Punkt besteht, ist unser Verfahren nicht anwendbar.
Alle diese Fälle bedürfen einer genaueren Analyse für die Grenzkurven. Die entsprechenden Formelsätze dafür haben wir hier nicht angegeben. In der Originalarbeit von F.W. Bessel sind auch diese Fälle diskutiert.

Mit diesen Ausführungen ist die erste Aufgabenstellung gelöst. Die Berechnung des Verlaufes einer Finsternis für einen festen Ort werden wir in einer weiteren Arbeit betrachten, (Ebenso die wichtigen Spezialfälle von Sternbedeckungen durch den Mond und von Planetendurchgängen durch die Sonnenscheibe).

Ausdruck der gesamten Publikation:

Es ist sehr aufwendig, diese Dokumentation als pdf aufzubereiten. Da ich die Zugriffe für überschaubar halte, bitte ich alle Interessenten, sich die Heftchen mit Hilfe eines Druckers herzustellen.

Die Publikation bestand aus zwei Teilen, die in drei Dateien gegeben sind. Die Dateien 9.pdf und 10.pdf müssen auf einem Drucker ausgegeben werden, der zweiseitig drucken kann. Es muss an der langen Kante gespiegelt werden. Dann liegen die Publikationen nahezu so vor, wie ich sie hier habe.

In Nr. 10 lag ein Einlegeblatt – in der DDR wurde jeder Fetzen Papier gespart. Dieses ist in Datei 10a.pdf enthalten. Auch diese Datei zweiseitig ausdrucken, dann auf A5 ausschneiden und einlegen.

Uwe Pilz im September 2019