

## Interpolation mit dem Differenzenschema

Für das Aufsuchen von Himmelskörpern benutzt man bekanntermaßen oft tabellarische Werte in Form von Ephemeriden. Nicht selten steht man vor dem Problem, dass man die Position nicht für einen der tabulierten Zeitpunkte benötigt, sondern für einen Zwischenwert. Solange sich die Werte "gutmütig" verhalten und jeder Zwischenwert mit minimalem Fehler durch [lineare Interpolation](#) ermittelt werden kann, stellt dies kein großes Problem dar; jedoch findet man in manchen Jahrbüchern z.B. Merckurephemeriden im 5- oder gar 10-Tages-Abstand, mit sehr ungleichförmigen Positionsänderungen. Die hierbei gewählte Intervalllänge ist definitiv zu groß, als dass die lineare Interpolation hier noch sinnvolle Positionsangaben liefern kann.

In vielen Fällen kann man mit dem **Differenzenschema** bessere Resultate erzielen. Es stellt gewissermaßen eine höher Ordnung der Interpolation dar.

Wir stellen die diskreten tabulierten Werte als wie folgt dar:

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(a - 2w) & & & & & & \\
 & f'(a - 3/2w) & & & & & \\
 f(a - w) & & f''(a - w) & & & & \\
 & f'(a - 1/2w) & & f'''(a - 1/2w) & & & \\
 f(a) & & f''(a) & & & & \\
 & f'(a + 1/2w) & & f'''(a + 1/2w) & \text{usw.} & & \\
 f(a + w) & & f''(a + w) & & & & \\
 & f'(a + 3/2w) & & f'''(a + 3/2w) & & & \\
 f(a + 2w) & & f''(a + 2w) & & & & \\
 & f'(a + 5/2w) & & & & & \\
 f(a + 3w) & & & & & & 
 \end{array}$$

Hierbei bezeichnet  $f'$  die erste Ableitung,  $f''$  die zweite Ableitung usw.  $w$  ist hierbei die Intervalllänge (z.B. in Tagen).

Die Werte der zweiten Spalte beispielsweise werden als Differenz der Nachbarwerte aus der ersten Spalte gerechnet:  $f'(a - 3/2w) = f(a - w) - f(a - 2w)$ ; die anderen Werte berechnen sich völlig analog.

Wenn nun der Wert für eine Zwischenstelle  $a + nw$  gesucht wird, so kann man mit einer der beiden folgenden Formeln vorgehen:

$$f(a \pm mw) = f(a) \pm nf' \left( a \pm \frac{1}{2}w \right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f''(a \pm w) \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f''' \left( a \pm \frac{3}{2}w \right) + \dots$$

(Newton) bzw.

$$f(a \pm mw) = f(a) \pm nf'(a) + \frac{n^2}{1 \cdot 2} f''(a) \pm \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) \dots$$

(Stirling)

Die Formel nach Newton wird verwendet, wenn der Wert für  $a$  am Beginn oder Ende der Tabelle steht, während für die übrigen Fälle die Stirling-Formel zur Anwendung kommt. Die Interpolationsrechnung wird abgebrochen, sobald die neu hinzukommenden Glieder keinen nennenswerten Beiträge mehr liefern..

Aus: Handbuch für Sternfreunde (3. Auflage).